§ Lax-Milgram theorem

Lax-Milgram 定理是泛函分析中一個非常重要的結果，常用來證明偏微分方程（特別是橢圓型方程）弱解的存在唯一性。

令 V 為實或複數上的 Hilbert 空間，若有連續、對稱、強制（coercive）的雙線性型 $a(u,v)$，以及一個連續線性泛函 $f \in V'$，則存在唯一的 $u \in V$ 使得

$a(u,v) = f(v), \forall v \in V$

條件

1. 連續性：存在常數 C>0，使得 $|a(u,v)| \le C|u|_V |v|_V$

2. 強制性：存在常數 $\alpha > 0$，使得 $|a(v,v)| \ge \alpha |v|^2, \forall v \in V$

例 Poisson 方程的弱解

考慮 $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset R^n$ ，u=0 on $\partial\Omega$

令 $V = H_0^1(\Omega)$，即所有在 Ω 上具有一階弱導數且邊界為 0 的 Sobolev 函數。弱形式為： $a(u,v) = f(v), \forall v \in V$

其中 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ ， $f(v) = \int_\Omega fvdx$

驗證 Lax-Milgram 條件：

- **雙線性型的連續性**：

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \le \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \le \|u\|_V \|v\|_V$$

- **強制性**（Poincaré 不等式保證）：

$$a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \ge \alpha \|v\|_V^2$$

- $f \in V'$ 若 $f \in L^2(\Omega)$，那麼 $f(v) = \int_\Omega fv$ 是連續線性泛函。

根據 Lax-Milgram 定理，存在唯一一個 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega fvdx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$ (v 稱為測試函數)

這就是 Poisson 方程弱解(weak solution)。

我們找到一個 $u \in H_0^1(\Omega)$ ，被稱為原 Poisson 方程 Dirichlet 問題的弱解，這意味著：

1. 它在 H_0^1 的意義下滿足邊界條件 u=0 在 $\partial\Omega$ 上

2. 它滿足變分方程 $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega fvdx$ 對所有測試函數 $v \in H_0^1$ 成立。

這等價於說方程 $-\Delta u = f$ 在分佈（或弱導數）的意義下成立。
這是現代偏微分方程數值分析（特別是有限元方法）的理論基石。
例 $\Omega=(0,1)\times(0,1)\subset R^2$ $\quad f(x,y)=2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

1. Classical solution $u(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

(1) $u\in H_0^1(\Omega)$

(2) 對 $\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 須驗證 $\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dxdy=\int_\Omega fvdxdy$

左式= $\int_0^1\int_0^1(\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)\frac{\partial v}{\partial x}+\pi\sin(\pi x)\cos(\pi y)\frac{\partial v}{\partial y})dxdy$

$=\cdots$ integration by parts $=-2\pi^2\int_\Omega uvdxdy$

右式= $\int_\Omega 2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)vdxdy=2\pi^2\int_\Omega uvdxdy$