Spettral Theory in Riemannian geometry by Olivier Lablee

§ Introduction

R^3中，Laplace operator (Laplacian) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

黎曼流形(M,g)中，Laplace-Beltrami operator $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j)$

(註：Jacobi operator $J = \Delta + |A|^2 + Ric(N,N)$；Morse index 是 Jacobi operator 的負 eigenvalue 個數，即，$Index(J) = \#\{\lambda < 0 \mid J\phi = \lambda\phi$ 有非零解$\}$)

Spectrum 與幾何有密切關係，Δ_g 及其譜的研究稱為 spectral geomery。

(M,g) $-\Delta_g$：the operator is self-adjoint and its spetrum is discete。

例

1. Navier-Stokes equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - v \Delta u = -\nabla P \\ div(u) = 0 \end{cases}$$

2. Potential theory and gravity theory

$$\Delta u = f$$

3. Heat equation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t)$$

4. Wave equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0$$

5. Schrodinger equation

§ 問題與反問題：

1. Direct problems
   (1) Compute Spec(M,g) the first non-null eigenvalue λ_1
   (2) Properties of Spec(M,g)
2. Inverse problems
   (1) Spec(M,g)決定了 M 的 dimension，volume，the integral of scalar curvature(over M)
   (2) Isospectral problem：Can we hear the shap of a drum？
   If (M,g)，(M', g') are isospectral，are they isometric？ J.Milnor 1964 and a

planar counter example by C.Gordon、D.Webb and S.Wolpert 1992

Open problems：

1. 是否能完全分類所有 isospectral 但非等距（non-isometric）的流形？
2. 已知譜可決定一些特定性質（例如體積、維度），但是否可決定所有拓撲不變量尚不清楚。
3. 傳統譜幾何多研究拉普拉斯-貝爾特拉米算子（Laplacian），但現代問題也包括其他算子：對這些算子的譜與幾何/拓撲性質之間的關聯研究尚不完全。

   - Hodge-Laplacian（作用於微分形式）
   - Dirac operator（特別在弦論與指標定理中）
   - Schrödinger operator（與量子幾何有關）

4. 給定一類隨機結構，其譜的分佈有何統計性質？是否存在集中現象或普遍行為？這與數理物理、隨機矩陣理論（RMT）等領域交叉。
5. 譜與量子混沌
   在負曲率流形上，拉普拉斯算子的譜與古典力學的混沌行為有何對應？這與 Berry、Sarnak、Zelditch 等人的研究有關，是物理與數學交界的重要問題。
6. 計算譜不變量的穩定性與可識別性

§ Laplacian operator 的幾何意義

設$u:R\to R$ 考慮 u 在[-h,h]的平均值$\bar{u}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u(x)dx$

u(x)在 x=0 展開$u(x)=u(0)+u'(0)x+u''(0)\cdot\frac{x^2}{2}+u'''(0)\cdot\frac{x^3}{6}+o(x^4)$

則$\bar{u}=u(0)+\frac{u''(0)}{6}h^2+o(h^4)$

$u''(0)=\frac{6}{h^2}(\bar{u}-u(0))+\mathrm{o}(\mathrm{h}^2)$ ($\Delta u(x)=\frac{d^2u}{dx^2}$ 所以 u 的 Laplacian 在度量 u(0)與 u 在其鄰域的平均值的差)