§ Morse theory and Spectral theory

性質	Jacobi 算子譜	Laplace-Beltrami 譜
定義域	沿單條測地線 γ	整個流形 M
物理意義	測地線穩定性	流形振動頻率/量子能級
與曲率關係	直接依賴 $R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}$	透過 Ricci 曲率影響
在 Morse 理論中的作用	計算測地線的 Morse 指數	描述流形本身的譜拓撲（如熱核跡）

Jacobi operator 可視為在某個特定範圍內對變分問題的「穩定性分析」工具，它是一個自伴微分算子，型式如下：

$$J = -\frac{d^2}{dt^2} - R(\gamma'(t), \cdot)\gamma'(t)$$

在這裡 R 是曲率張量，這樣的運算子在地質變分（如測地線穩定性）中出現。

Laplace–Beltrami operator Δ 是定義在黎曼流形上的自然拉普拉斯算子，常用來分析函數、微分形式甚至截面（sections）的譜性質。

關聯：

1. **Jacobi operator 通常是某些特定幾何變分問題的 Hessian**，因此其特徵值揭示臨界點的型態（例如極小測地線是否穩定）。
2. **這些 Jacobi operator 的特徵值可以在某些設定下與 Laplace–Beltrami 的特徵值相連接**。例如，在研究測地線或極小子流形穩定性時，若將 Laplacian 作在切空間或法空間上的張量場，就會出現 Jacobi 類型算子。
3. **兩者皆屬於二階自伴橢圓算子，譜理論的分析方法可直接應用於 Jacobi operator**，從而將 Morse 指數理論轉譯成某種「有限維譜理論」。

Morse index 是 Jacobi operator 的負特徵值個數（含重數），代表對應臨界點的不穩定方向。

這點正是連結點：

Morse index = 負特徵值的數量 = 負能階數（negative eigenvalue count）
這讓 Morse 理論成為分析型的方法來捕捉拓撲變化，尤其在 Morse 函數的臨界

點對應到流形的拓撲變化（例如 CW-complex 結構）。

Edward Witten 在 1982 年提出的 Witten deformation 方法，將 Morse theory 與譜理論統一。

在物理語言中，Jacobi operator 可視為一種「二次變分產生的能量算子」，與 Laplacian 是描述波動/熱傳導的 operator 類似。
兩者可在半古典分析（semi-classical analysis）中統一視為量子 Hamiltonian 的不同限制。
兩者的統一思想：

關鍵連結	說明
自伴算子	兩者都處理自伴橢圓微分算子的譜問題
Morse index = 負特徵值數	Jacobi operator 的譜結構與 Morse 理論核心完全一致
Witten deformation	使得 Laplace–Beltrami 與 Morse homology 建立數學橋樑
幾何變分與拓撲變化的譜特徵分析	譜理論方法成為 Morse 理論中核心運算工具之一

§ 我們就以圓圈 S^1 為例，從最簡單的模型出發，分析 Morse theory 與 Laplace－Beltrami operator 之間的關係，這是非常清楚又具啟發性的例子。
我們把單位圓 S^1 視為參數空間 $\theta \in [0, 2\pi)$，帶有標準黎曼度量 $ds^2 = d\theta^2$
對於這個流形：

Laplace-Beltrami operator 為 $\Delta = -\frac{d^2}{d\theta^2}$

所有光滑函數 $f \in C^\infty(S^1)$ 可以展開為傅立葉級數
在 Morse theory 中，考慮 $f(\theta)=\cos\theta$ 作為典型的 Morse 函數，其臨界點是
$\theta = 0$ (最大值，指數=1)
$\theta = \pi$ (最小值，指數=0)
這裡指數是 Hessian(第二導數)在該點的負特徵值個數，也就是 Morse index：

$$f''(\theta) = -\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -1 \Rightarrow index = 1 \\ f''(\pi) = +1 \Rightarrow index = 0 \end{cases}$$

所以 $\cos\theta$ 是 S^1 上一個合法的 Morse 函數(雖然只有兩個臨界點，以達到最低可能值)。

在 S^1 上，Laplace 算子的特徵函數是傅立葉模式： $\Delta e^{in\theta} = n^2 e^{in\theta} (n \in Z)$

特徵值 $\lambda_n = n^2$ ，每個 $n \neq 0$ 都有重數 2(因為 $\sin(n\theta), \cos(n\theta)$)

特別地， $f(\theta)=\cos\theta$ 是特徵函數之一，對應的特徵值 $\lambda=1$。

§ Morse 與 Laplacian 的關聯

1. 臨界點↔低能量模態
   Morse 函數 $f(\theta)=\cos\theta$ 對應的是拉普拉斯譜中最低頻的非平凡模態 ⇒ 這是對稱性最少破壞的一種變形。
2. Hessian↔微分算子
   在 Morse theory 中，考慮函數空間中的變分：
   $E(f)=\int_{S^1}|\nabla f|^2 d\theta$ 這是能量泛函，其變分導出拉普拉斯算子 ⇒ 這是譜理論與變分法的基本橋樑。
3. Witten deformation 的例子
   如果我們考慮 Witten 的方式，變形 Laplace：
   $$\Delta_t=(d+tdf\wedge)^*(d+tdf\wedge)$$
   那麼在 $t\to\infty$ 時，特徵值集中在 f 的臨界點處，進而用譜理論來重構 Morse 同調。

§ 比較

對象	Morse Theory	Spectral Theory
函數	$f(\theta)=\cos\theta$	也是特徵函數之一，對應特徵值 $\lambda=1$
臨界點	$\theta=0,\pi$	波峰波谷 ⇒ 對應最低階模態
Hessian	$f''(\theta)=-\cos\theta$	局部線性化 ⇒ Jacobi-like operator
對應關係	Morse index = 負特徵值個數	特徵值排序與能量層級密切相關

§ Witten deformation method 可以統一 Morse theory 與 Spectral theory，意思是說 CMC 曲面的穩定性問題就可以用譜理論來解決。

Edward Witten 1982：

Supersymmetry and Morse theory

Morse homology ≅ de Rham cohomology 可透過譜理論來證明。

Witten deformation method 提供了將 Morse 理論幾何直觀(指數、臨界點)轉換成 Laplace 譜理論分析的方法，是兩者的橋樑。

Witten 考慮一個 Morse 函數 $f:M\to R$ 在流形 M 上定義變形拉普拉斯算子：

$\Delta_t=(d_t+d_t^*)^2=e^{-tf}de^{tf}+e^{-tf}d^*e^{tf}$ 稱為 Witten deformation，在 $t\to\infty$ 的極限下：

低階特徵值集中在 Morse 函數的臨界點附近，每個臨界點對應一個特徵值趨近於 0

因此：特徵空間的維度≈Morse index 的個數

CMC 曲面的穩定性問題

考慮一個 CMC 曲面 $\Sigma \subset R^3$（平均曲率 H 為常數），在進行變分時，我們研究其第二變分，也就是能量泛函（面積 + 體積約束）下的穩定性。

這時會出現一個 Jacobi operator $L = \Delta_\Sigma + |A|^2 + Ric(v,v)$

其中 Δ_Σ：Laplace-Beltarmi operator

$|A|^2$：第二基本型的平方長度

Ric(v,v)：背景流形的 Ricci 曲率在法向方向的分量

這個 L 是個自伴二階橢圓算子 ⇒ 屬於譜理論分析範圍

穩定性↔ 特徵值

若 L 的第一特徵值為非負，則該 CMC 曲面為穩定的。

若存在負特徵值，則表示有變形方向可以降低面積（不穩定）。

結論：

CMC 曲面穩定性問題，本質是某個 Jacobi operator 的譜問題，因此完全可以用譜理論來解釋與分析。這也是 geometric analysis 的經典例子。

主題	工具	結論
Morse theory	Hessian / Jacobi operator	指數 = 負特徵值數
Witten 方法	Deformed Laplacian	Morse homology ↔ de Rham cohomology
CMC 穩定性	Jacobi operator on surface	穩定性 ↔ 第一特徵值符號（正 ⇒ 穩定，負 ⇒ 不穩定）
統一視角	譜理論（Spectral theory）	函數變分與幾何變分皆可歸結於自伴算子的譜性質分析

§ S^2 上的 Morse theory 與 Laplacian 的特徵函數與譜結構

我們令 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$，單位球面，其球面座標為：

$$x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\theta, \quad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [0,2\pi)$$

最簡單的 Morse 函數為高度函數 $f(x,y,z) = z = \cos\theta$

臨界點與 Morse 指數

點	位置	Hessian（第二導數）正負號	Morse 指數
北極 N	$\theta = 0$	$f'' < 0 \Rightarrow$ 最大值	2
赤道	無臨界點	$\nabla f \neq 0$	—
南極 S	$\theta = \pi$	$f'' > 0 \Rightarrow$ 最小值	0

這是個**完美的 Morse 函數**：僅有兩個非退化臨界點，各具指數 $0, 2$，符合 Euler characteristic：

$\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$

在球面上，拉普拉斯算子為：

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

特徵函數：球諧函數 $Y_\ell^m(\theta, \phi)$

$$\Delta_{S^2} Y_\ell^m = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \quad -\ell \leq m \leq \ell$$

- $\ell = 0$：常數函數 $\Rightarrow$ 特徵值 0
- $\ell = 1$：一次球諧函數 $\Rightarrow x, y, z \Rightarrow$ 特徵值 -2

$z = \cos\theta$ 就是 Y_1^0，特徵值=-2，這正是前面作為 Morse 函數使用的那個函數！

對象	Morse Theory	Spectral Theory
函數	$f(\theta, \phi) = \cos\theta$	即 $Y_1^0(\theta, \phi)$，$\lambda = -2$
臨界點	$\theta = 0, \pi \Rightarrow$ 北極、南極	該函數的最大值/最小值
指數	北極指數 2，南極指數 0	譜不給指數，但反映「模態方向數」
特徵值	無（Morse中不考慮）	-2
幾何結構	臨界點拓撲改變流形	球諧分解是 Laplacian 的全譜基底

若我們對 Morse 函數 $f = \cos\theta$ 使用 Witten 變形：

- 特徵值集中在北極、南極兩點附近
- 在 $t \to \infty$ 時，最低能級對應的特徵函數會集中在這些臨界點上，符合 Morse 同調
- Morse cohomology 有兩個生成元 ⇒ 對應 $\lambda \approx 0$ 的兩個特徵函數

結論

1. 在 S^2 上， $f = \cos\theta$ 是個理想的 Morse 函數，也是 Laplacian 的一次球諧特徵函數 ⇒ 二者天然對應。
2. Morse 指數反映臨界點類型，而 Laplacian 特徵值與模態數、振動頻率相關。
3. Witten deformation 能夠在高階極限中把特徵值集中到 Morse 臨界點，統一兩者。
4. 球面是最基本的例子，但這種對應機制能推廣到任意流形與 Morse 函數。

這裡的 Morse theory 與 CMC 曲面的穩定性意義與對象不同，可透過譜理論統一起來。

觀點	Morse theory	CMC 曲面穩定性
變分對象	一個函數 f 的臨界點	一個曲面 Σ 的面積泛函
二次變分	$\mathrm{Hess}_f(p)$	Jacobi operator L
指數定義	Hessian 的負特徵值個數	L 的負特徵值個數
幾何意義	流形拓撲結構的「添胞」	曲面變形的「不穩定方向」
相同之處	都是「泛函的負方向數目」	

是否能用 Morse theory 理解 CMC 曲面的穩定性？
通常不這麼做。