

§ 微分方程的特徵值與特徵函數分析

$$(1) y=y(t), \quad \frac{d}{dt}y = \lambda y \quad \text{then} \quad y(t) = Ae^{\lambda t}$$

$\frac{d}{dt}$ 是一個微分算子， λ 是特徵值， y 是特徵函數。

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

這是向量形式的特徵方程

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \text{ 是一個微分方程組，其一般解為 } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

算出 A 的特徵值 $\lambda_1 = 2$ ，特徵向量 $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ； $\lambda_2 = -1$ ， $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

系統 $(x(t), y(t))$ 的相流(phase flow)由矩陣 A 的特徵值決定，因為特徵值一正一負，系統的相流呈現鞍點(saddle point)的特性：

(1) 不穩定方向：對應特徵值 $\lambda_1 = 2$ 的特徵向量為 $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。沿此方向的軌跡

會隨時間指數增長，遠離原點。

(2) 穩定方向：對應特徵值 $\lambda_2 = -1$ 的特徵向量為 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。沿此方向的軌跡

會隨時間指數衰減，趨近原點。

除特徵向量方向外，其他軌跡會呈現鞍形。

初始條件靠近穩定方向的點會先趨近原點，但隨後被不穩定方向拉離，形成彎曲路徑。

原點為不穩定鞍點，既有吸引（穩定方向）又有排斥（不穩定方向）的特性，整體系統無週期性或螺旋行為。

相流表現為鞍點結構，軌跡沿特徵向量方向伸展或收縮，伴隨面積放大與方向反轉，形成典型的非穩定性動態。

§ 具體實例

1. 機械系統：不穩定平衡點附近的運動 例如倒立擺
2. 電路系統
3. 生態模型

假設物種 x 與 y 的增長率受資源限制：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

物種 x 有內生增長，但受 y 抑制。物種 y 依賴 x 但自身衰減。

- (1) 鞍點平衡：初始族群比例若接近穩定方向（如 $y \propto 2x$ ），物種共存；若偏向不穩定方向（如 $x \gg y$ ），物種 x 爆發性增長並驅逐 y 。
- (2) 行列式負值：反映競爭關係中資源分配的「非互惠性」（如掠食者-獵物的不對稱互動）。

4. 化學反應

例子：自催化反應與抑制劑的耦合系統

考慮反應物濃度 x 和抑制劑濃度 y 的動力學：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y & (x \text{ 自催化生成，但被 } y \text{ 抑制}) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y & (y \text{ 由 } x \text{ 生成，同時自我降解}) \end{cases}$$

5. 經濟模型

例子：價格與庫存的動態調整

假設價格 x 和庫存 y 的關係為：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y & (\text{高價格刺激生產，但高庫存壓抑價格}) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y & (\text{生產速度依賴價格，庫存自然損耗}) \end{cases}$$

- (1) 鞍點均衡：若庫存控制得當（沿穩定方向），市場穩定；若生產過剩（沿不穩定方向），價格崩潰。
- (2) 行列式負值：反映供給鏈中「反饋延遲」導致的振盪風險。