

## § The Spectrum of flat Kline Bottle

對於平坦克萊因瓶（flat Klein bottle），其 Laplace-Beltrami 算子的譜（spectrum）可以透過其幾何構造推導。

平坦克萊因瓶由一個矩形  $[0, a] \times [0, b]$  透過特定粘合得到：左右邊界以反向方向粘合  $(0, y) \sim (a, b - y)$ ，上下邊界以相同方向粘合（即  $(x, 0) \sim (x, b)$ ）。

此度規在局部為歐幾里得度量，因此稱為平坦。

Laplace-Beltrami 算子  $\Delta$  的特徵值問題為  $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$

根據粘合條件，特徵函數需滿足週期性與對稱性要求。譜可分為兩部分，分別對應於不同類型的特徵函數：

當特徵函數在  $y$ -方向為常數時(即  $n=0$ )：

特徵值為  $\lambda_k = \left(\frac{2\pi k}{a}\right)^2, k \in \mathbb{Z}$

當  $k=0$  時， $\lambda_0 = 0$  (對應於常數函數，重數為 1)；當  $k \neq 0$  時，每個  $\lambda_k$  對應重數為

2 的特徵函數(例如  $\cos \frac{2\pi kx}{a}, \sin \frac{2\pi kx}{a}$ )

當特徵函數在  $y$ -方向震盪時(即  $n \neq 0$ )：

特徵值為  $\lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

每個特徵值對應重數為 2 的特徵函數。

$$\sigma(\Delta) = \left\{ \left( \frac{2\pi k}{a} \right)^2 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n}{b} \right)^2 \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

其中  $a$  和  $b$  為克萊因瓶的幾何參數（即覆蓋矩形的邊長）。