

Consider the operator $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - e^2 r^{-1}$ with domain $H^2(\mathbb{R}^3)$, where $m, e > 0$

and $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Show that H is self-adjoint and $\text{Spec}(H) = \{-\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, n \geq 1\}$

這個算子實際上就是氫原子哈密頓算子，在三維歐幾里得空間 $H^2(\mathbb{R}^3)$ 上作用。拉普拉斯算子 Δ 在合適的定義域（如作用在速衰減或平方可積函數空間，並具有適當邊界條件）下是對稱且自伴的。

電荷勢能項 $-\frac{e^2}{r}$ 是實函數乘法算子，本身也是自伴的。

只要定義 H 的域為 $D(H) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid Hf \in L^2, f \text{ 足夠光滑且衰減快}\}$ 則 H 是對稱且自伴。

此算子的離散譜正是氫原子能級： $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, n = 1, 2, 3, \dots$ 可以直接由求解薛丁格方程得出。

每個能階 n 對應的本徵函數為標準的氫原子波函數。

深入了解氫原子的能階結構：

結構層級	對應理論	說明
主能階 (n)	Schrödinger equation / 譜理論	解氫原子的中心勢 Schrödinger equation 得到本徵值 (能量) 與本徵態 (波函數)
角動量子數 (l)	譜理論 / 球諧函數分析	自由度來自角動量算子的譜結構
磁量子數 (m)	Lie 群表示 / 自旋理論	空間方向的量子化，與旋轉對稱性有關
自旋 (s)	自旋理論	電子內在自由度 ($SU(2)$ 群表示)
精細結構修正 (自旋-軌道耦合等)	相對論修正 / 自旋理論	Dirac equation 導致能階分裂
超精細結構	自旋與核自旋交互作用	核磁交互