§ Rectangular domains with boundary condition
參考 Walter A. Strauss 6.2 p.161

§ 01 Problem setup：

1. Domain：矩形區域 $\Omega = [0,a] \times [0,b] \subset R^2$ ，其中 a>0，b>0，邊界 $\partial\Omega$
2. Dirichlet 問題：$-\Delta = \lambda u$ in Ω ，$u\big|_{\partial\Omega} = 0$
3. 物理背景：這類問題常見於波動方程、熱傳導方程等物理問題，例如矩形膜振動或固定邊界的溫度分布。

§02 $H = L^2(\Omega)$

函數族 $\{\phi_{n_1,n_2}\}_{n_1,n_2 \geq 1}$ 構成 $L^2(\Omega)$ 的 Hilbert 完備正交基：

$$\phi_{n_1,n_2}(x,y) = \sin(\frac{n_1 \pi x}{a}) \sin(\frac{n_2 \pi y}{b}), n_1, n_2 \in N = \{1,2,3,...\}$$

(這些函數在 $L^2(\Omega)$ 中相互正交 $\left\langle \phi_{m_1,m_2}(x,y), \phi_{n_1,n_2}(x,y) \right\rangle = 0$)

§ 03 Dirichlet Laplace 算子的譜

$$Spec_{Dirichlet}([0,a] \times [0,b]) = \{\pi^2(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}), (n_1, n_2) \in (N^*)^2\}$$

關聯的特徵函數為 $\{\phi_{n_1,n_2}\}$

§ 推導

- **分離變量法（Separation of Variables）**：矩形區域的對稱性允許將偏微分方程（PDE）分離為兩個常微分方程（ODE）：

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \implies -\frac{X''}{X} = \lambda_x, \quad -\frac{Y''}{Y} = \lambda_y, \quad \lambda = \lambda_x + \lambda_y.$$

邊界條件 $X(0) = X(a) = 0$ 和 $Y(0) = Y(b) = 0$ 給出一維問題的解 $X_{n_1}(x) = \sin(\frac{n_1 \pi x}{a})$, $Y_{n_2}(y) = \sin(\frac{n_2 \pi y}{b})$。

用變數分離法求出解，再驗證一下。

§ 譜的性質

1. 最小特徵值(基態)：當 $n_1 = n_2 = 1$ ，$\lambda_{\min} = \pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})$
2. 特徵值隨 n_1, n_2 增大而遞增。$\lambda_{n_1,n_2} \to \infty$ ，當 $n_1 \to \infty$ 或 $n_2 \to \infty$
3. 特徵值的重數

§ 物理意義：在波動方程中，特徵值對應系統的固有頻率（例如，矩形鼓膜的振動頻率）。