

Exercise 3.3.4

Let (M, g) be a Riemannian manifold and $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a function such that $|\nabla f| = 1$.

Show that the integral curves of ∇f are geodesics .

條件與符號說明：

1. ∇f 是 f 的梯度向量場
2. 積分曲線 $\gamma(t)$ 滿足 $\dot{\gamma}(t) = \nabla f|_{\gamma(t)}$
3. $\forall p \in M, |\nabla f(p)| = 1$

測地線方程式

$\gamma(t)$ 是測地線 $\Leftrightarrow$ 其加速度消失 $\nabla_T T = 0$, $T = \dot{\gamma}(t)$

計算沿著 $\gamma(t)$ 的協變導數： $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \nabla_{\nabla f} \nabla f|_{\gamma(t)}$

計算 ∇f 的長度對方向導數：

$$X |\nabla f|^2 = X_g(\nabla f, \nabla f) = 2g(\nabla_X \nabla f, \nabla f)$$

因為 $|\nabla f| = 1$ 所以當 $X = \nabla f$ 時 $g(\nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f) = 0$ 即 $\nabla_{\nabla f} \nabla f$ 與 ∇f 正交。

但在這種情形下，長度既維持不變，方向也沒有被改變（偏移）：即「物體」沿著“梯度流”運動時，既不改變速率，也不偏離原方向；符合測地線「無加速度」的條件。

換言之，梯度場沿著自身方向的協變導數（加速度）本身等於零，這表示這條路徑在流形內是“最直”的，也就是測地線。

直觀上：「若一個向量場長度恆定且其積分曲線代表的運動方向和自身完全一致，不產生任何側向力或變速，這樣的路徑就是測地線。」

DeepSeek：

設 $T = \dot{\gamma}(t)$ ，我們要證明 $\nabla_T T = 0$ ，即 $\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0$

$$|\nabla f| = 1 \text{ 即 } g(\nabla f, \nabla f) = 1$$

$$\text{兩邊對作協變導數：} \nabla_{\nabla f} g(\nabla f, \nabla f) = 0 \Rightarrow 2g(\nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f) = 0$$

To conclude that $\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0$, we use the fact that ∇f is a gradient field. The Hessian of f , $\nabla^2 f$, is symmetric:

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = \nabla^2 f(\nabla f, \cdot).$$

However, from $g(\nabla f, \nabla f) = 1$, we have:

$$\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) = 0.$$

Since $\nabla^2 f$ is symmetric and ∇f is non-null (as $|\nabla f| = 1$), this implies:

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = 0.$$



The integral curve $\gamma(t)$ satisfies:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

which is the geodesic equation. Therefore, $\gamma(t)$ is a geodesic.