The Spectral Gap

1. 經典下界估計(基於曲率與直徑)

Lichnerowicz 1958

若完備 Riemann 流形 M 的 Ricci 曲率滿足 $Ric \geq (n-1)K$ 且 K>0 則 $\lambda_1 \geq nK$

Obata 1962

承上，若 $\lambda_1 = nK$ ，則該流形必與半徑為 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的 n 維球面等距(Rigidity)

Li-Yau 1980

若 $Ric \geq 0$ 且直徑為 d，則 $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{4d^2}$

2. 基於熱核與流形幾何(Li-Yau 梯度估計)

3. Zhong-Yang 估計

   Zhong-Yang 1984 對於具有 $Ric \geq 0$ 的 compact 流形，直徑為 d，則 $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{d^2}$

Cheeger 不等式 $\lambda_1 \geq \frac{h^2(M)}{4}$

分成三個層次：

1. **曲率約束 (Lichnerowicz/Obata)**：假設曲率「均勻且正」，得出對應球面的 λ_1 下界。
2. **直徑約束 (Li-Yau/Zhong-Yang)**：放棄曲率的均勻性，只要求 Ricci ≥ 0，用流形的「長度」（直徑）來框定能量。
3. **拓撲/幾何分割約束 (Cheeger)**：將 λ_1 視為流形分割難度的指標，適用於更一般的緊致流形。

§ Laura Monk

側重於統計意義上，隨機抽取的流形族群如何呈現特定的譜行為（如擴張圖性質）。她近年來也開始探索利用 Lean 4 進行譜幾何的形式化驗證。