

§ Weyl asymptotic formula and Polya conjecture

在譜幾何中，Weyl 定律（Weyl Law）是一個非常核心的漸進公式，它描述了緊黎曼流形上 Laplace-Beltrami operator 特徵值的增長速率主要由兩個全局的幾何量決定：空間的維度 n 和 n 維體積。

簡單來說，這個定律回答了「我們能聽見形狀的哪些信息？」

例

一個緊的、邊界光滑的平面區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ，比如一個形狀不規則的鼓面。我們要研究這個鼓面上波的振動頻率，這對應於求解以下 Dirichlet 特徵值問題：

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{在 } \Omega \text{ 內部}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{其中 } \Delta \text{ 是平坦的 Laplace 算子}$$

$$\text{特徵值 } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

定義 Counting function $N(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leq \lambda\}$ Each eigenvalue is counted with its multiplicity。

Weyl 定律說：當 $\lambda \rightarrow \infty$ 時， $N(\lambda)$ 的漸進行為是 $N(\lambda) = \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi} \lambda + o(\lambda)$

例如

假設有兩個面積相同但形狀不同的鼓面，一個是半徑 R 的圓盤，另一個是邊長為 a 的正方形，且 $\pi R^2 = a^2$ 。

根據 Weyl 定律，當我們考慮非常高頻的振動（ λ 很大）時，這兩個鼓面「高於某個頻率的振動次數」是大致相同的。具體來說，我們可以透過計數函數的漸進主項來反推鼓面的面積：

$$\text{Area}(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi N(\lambda)}{\lambda}$$

這說明，雖然我們無法從頻譜完美「聽出」鼓的形狀（例如是圓的還是方的），但我們確實能「聽出」它的面積。這就是 Weyl 定律在經典情形下的核心含義。

推廣到任意維的緊黎曼流形 (M, g) ， $N(\lambda) \sim \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{Vol}_g(M) \lambda^{n/2}$ as $\lambda \rightarrow \infty$

一個很遙遠的例子：Liouville 量子引力中的 Weyl 定律

應用領域	幾何背景	Weyl 定律形式/特點
經典平面區域	光滑邊界的平面區域，平坦度量	$N(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi} \lambda$
光滑黎曼流形	一般維度的緊光滑流形，光滑度量	$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{Vol}_g(M) \lambda^{n/2}$
奇異度量（如氣態巨行星模型）	度量在邊界附近「爆炸」的奇異流形	增長指數由豪斯多夫維數決定，可能不同於拓撲維數
Liouville 量子引力	由量子引力構造的隨機幾何背景	形式與經典類似，但比例常數更大，特徵值密度更高

For a square torus , each eigenvalue $\lambda_{m,n} = \frac{4\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$ corresponds to a point with integer coordinates (m,n) on the plane ◦

An approximate number of integer points inside the circle is given by the area of the circle ◦

$$N(\lambda) = \pi\left(\frac{a\sqrt{\lambda}}{2\pi}\right)^2 + R(\lambda) = \frac{a^2\lambda}{4\pi} + R(\lambda) , R(\lambda) = o(\lambda) \text{ as } \lambda \rightarrow \infty$$

The problem of counting the number $N(\rho)$ of integer points inside a disk of radius ρ is called **Gauss circle problem** ◦

Conjecture (Hardy 1916)

For any $\varepsilon > 0$, we have $R(\lambda) = O(\lambda^{1/2+\varepsilon})$ as $\lambda \rightarrow \infty$

§ Estimating the number of integer points in a disk ◦

1. Main Estimate $N(r) \approx \pi r^2$

This is because, on average, each unit square on the integer grid contains about one point, and the area of the disk is πr^2 ◦

2. Error Term E(r)

The best known current bounds are of the form : $|E(r)| = O(r^\theta)$ with the smallest

known value for θ currently around $\frac{517}{824} \approx 0.627$ ◦

It is conjectured that the optimal bound is $O(r^{1/2+\varepsilon})$ for any $\varepsilon > 0$

r	$N(r)$	πr^2 (rounded)
0	1	0
1	5	3
2	13	13
3	29	28
4	49	50
5	81	79

G.H.Hardy S.Ramanujan

§ Bessel function and lattice point counting

Bessel functions solve differential equations that arise naturally when transforming radially symmetric functions (like the disk's characteristic function) in two dimensions ◦

The appearance of Bessel functions is tied to the circular symmetry of the problem.

§ Polya conjecture

猜想定義	有界歐氏區域上，Dirichlet拉普拉斯算子的第 k 個特徵值 λ_k ，不小於Weyl定律主項所給出的數值。
數學表達	計數函數形式： $N(\lambda) \leq C_d \Omega _d \lambda^d$ 特徵值形式： $\lambda_k \geq C_d^{-2/d} \Omega _d^{-2/d} k^{2/d}$
與Weyl定律的關係	猜想比Weyl定律更強，它要求Weyl主項不僅是漸進極限，更是一個貫穿始終的單側估計。
已獲證明的對象	可鋪砌全空間的區域（如三角形、平行四邊形）、高維歐氏球體、圓盤、平面扇形、環形域。
尚待解決的對象	一般凸區域、任何不能鋪砌空間的區域（在二維情形下）。

Pólya 猜想（1954）：

對於一個有界的歐氏區域 Ω （想像成一個鼓面），其振動頻率（特徵值）不可能比一個完全均勻的系統（如相同面積的方形鼓面）的頻率分佈更「稀疏」

圓盤無法鋪滿平面，其特徵值由貝塞爾函數的零點給出，將這些零點排序並與一個簡單公式比較，是一個極其困難的數論問題。

近期的突破：

由 N. Filonov, M. Levitin, I. Polterovich 和 D. Sher 等組成的研究團隊

Polya conjecture for Dirichlet eigenvalues of annuli