§ Harmonic Oscillator

The Schrodinger operator：$-\frac{d}{dx^2}+x^2$ on the manifold R。

1. 經典力學

彈簧 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ 勢能$U(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

The classical harmonic oscillator has energy

$H(q,p)=\frac{1}{2m}(p^2+m^2\omega^2q^2)$，leading to the Hamiltonian system

$\frac{dp}{dt}=-m\omega^2q \quad \frac{dq}{dt}=\frac{p}{m}$

量子諧振子(Quantum harmonic oscillator)：

在量子力學中，任何平滑的位能曲線在極小值附近，都可以透過泰勒級數展開近似為拋物線。這就是為什麼量子諧振子無處不在的原因。

$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega, n=0,1,2,...$ ω是經典角頻率。(每升一級，能量就剛好增加$\hbar\omega$)

即使是在絕對零度、系統處於最低能量狀態（基態，n=0）時，能量也不為零，而是$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$。這就是零點能量，粒子仍在不停地振動，不違反不確定性原理。

量子諧振子的機率分佈很有趣：

- **基態 ($n=0$)：** 波函數是一個漂亮的鐘形曲線（高斯函數），中心機率最高。
- **高能階：** 隨著 n 增加，波函數會開始震盪（由**厄米多項式 Hermite polynomials** 描述）。
- **古典對應：** 當 n 非常大時，粒子出現在兩端「端點」的機率會變大，這與古典力學中物體在端點速度最慢、待得最久的觀察一致。

階梯算子(Ladder Operator)

1. 創生(creation)算子 $a^\dagger$：讓系統跳上一層能量。
2. 湮滅(annihilation)算子 a ：讓系統跳下一層能量。

推導量子諧振子的能量：

1. 定義階梯算子

從哈密頓量出發$\mathrm{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

為了簡化，我們定義兩個不帶單位的算子 a（消滅算子）與$a^\dagger$（創生算子）：

$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i\hat{p}}{m\omega})$，$a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i\hat{p}}{m\omega})$，$[a,a^\dagger]=aa^\dagger-a^\dagger a=1$

$A^{*}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP), A=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP)$

$H=N+\frac{1}{2}$ where $N=A^{*}A$

N的eigenfunction即H的eigenfunction，但eigenvalue平移 $\frac{1}{2}$

2. 重寫哈密頓量

   $H=\hbar\omega(a^{\dagger}a+\frac{1}{2})$ 其中 $N=a^{\dagger}a$ 稱為粒子數算子，若找到N的特徵數n,則能量就是 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega, n=0,1,2,...$

3. 階梯效應
4. 尋找基態與零點能

The corresponding quantum mechanical Hamiltonian operator takes the same form，but where q and p are operators satisfying the canonical commutation relation：$[q,p]=i\hbar$

$Q=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ ，$P=\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p$ ，$H=\frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}H$ so that $H=\frac{1}{2}(P^2+Q^2)$

Where $[Q,P]=i$

In the Schrodinger representation Q=x，$P=-i\frac{d}{dx}$ and the stationary Schrodinger equation is $\frac{1}{2}(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2)\psi=\lambda\psi$

重要性

1. 任何微小振動的近似

   在物理學中，任何穩定的平衡系統，當受到微小擾動時，其行為都可以近似為 harmonic oscillator。

2. 場論的基石

   在更現代的物理中，如量子場論，空間中每一點的場都可以被視為一個獨立的 harmonic oscillator。對這些振子進行量子化，就得到了粒子的概念。也就是說，粒子可以被看作是場的量子化激發。

它是少數同時在經典和量子層面都能精確求解的系統，是學習從經典思維過渡到量子思維的最佳範例。