§ S^3的譜

Laplace-Beltrami operator Δ 作用在 $L^2(S^3)$ 上。假設 S^3 的半徑為 1 截面曲率為 1）

單位球面 S^n 的 Laplace 算子的特徵值為 $\lambda_k = k(k+n-1), k = 0,1,2,3,\ldots$

所以 S^3 的特徵值為 $\lambda_k = k(k+2)$

重複度為 $m_k = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k-2} = (k+1)^2$ (n=3)

k	特徵值 λ_k	重複度 m_k	說明
0	0	1	常數函數
1	3	4	$\mathbb{R}^4$ 中的限制線性函數 (x_1, x_2, x_3, x_4)
2	8	9	二次諧波
3	15	16	三次諧波
4	24	25	四次諧波

S^3 的來源於將 R^4 上的齊次調和多項式限制在球面上。

1. 在 R^4 上定義調和多項式：$\Delta_{R^4} P = 0$ 。 $P(\lambda x) = \lambda^k P(x)$
2. 將上些多項是限制在S^3上：Let $f_k(x) = P_k(x)\big|_{S^3}, P_k(x) \in \mathrm{H}_k(R^4)$
3. Laplace-Beltrami 算子的作用：$\Delta_{R^4} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{3}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\Delta_{S^3} f$
4. 多重度計算

後面的計算回頭去看一般 n 的情形。

結論

1. $Spec(S^3) = \{\lambda_k = k(k+2), k = 0,1,2,3,\ldots\}$
2. 重數(multuplicity)：每個特徵值 λ_k 對應的重數為 $(k+1)^2$
3. 特徵函數：對應的特徵函數是三維球諧函數（Spherical harmonics），可以通過 SU(2) 的不可約表示理論構造出來。它們是 $S^3 \cong SU(2)$ 上雙不變函數空間的基底。

S^3 是宇宙學模型（如閉合宇宙模型）和規範理論（如楊-米爾斯瞬子模空間的邊界）中的重要例子，其譜分析是相關研究的基礎。

§ S^3 上的其他算子

1. Hodge-Laplacian：作用在 differential form 上
2. Dirac Operator：考慮 S^3 上的旋量結構(spin structure)

將 S^3 的譜（Eigenvalues）應用於熱核方程（Heat Equation），核心在於構建熱核的譜展開式。

1. 熱核的譜展開

   在 S^3 上，熱方程為 $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$，其基本解(熱核 K(x,y,t))表示在時間 t，熱量從點 x 擴散到點 y 的機率密度。

   熱核可以寫成 $K(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{i=1}^{m_k} \phi_{k,i}(x)\phi_{k,i}(y)$

   其中 $\lambda_k = k(k+2)$，$m_k = (k+1)^2$，$\phi_{k,i}$ 是標準化的球面諧函數。

2. 熱跡與分配函數

   在物理學（如量子場論）或譜幾何中，我們更關注熱跡 Z(t)，它是熱核在全流形上的積分：

   $Z(t) = Tr(e^{t\Delta}) = \int_{S^3} K(t,x,x)dV = \sum_{k=0}^{\infty} m_k e^{-\lambda_k t} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 e^{-k(k+2)t}$

   我們可以利用 $k(k+2)-1 = (k+1)^2 - 1$ 令 j=k+1 化簡為 $Z(t) = e^t \sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{-j^2 t}$

   其形式很接近 Jacobi Theta 函數的導數，可以用於分析短時間內的漸近行為。

3. 短時間漸近展開（Minakshisundaram-Pleijel Expansion）

   當 $t \to 0^+$ 時（即擴散剛開始），熱跡的展開式直接揭示了 S^3 的幾何特性：

   $$Z(t) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots\right)$$

   透過對上述級數使用 **Poisson 求和公式**，我們可以得到係數：

   - $a_0 = \mathrm{Vol}(S^3) = 2\pi^2$：這驗證了熱跡的第一項永遠與流形的體積成正比。
   - $a_1 = \frac{1}{6}\int_{S^3} R\,dV$：這裡 R 是純量曲率（Scalar Curvature)。對於 S^3，$R = 6$，所以 $a_1 = 2\pi^2$。

   這證明了：**如果你知道一個流形的譜，你就能「聽出」它的體積和總曲率。**

4. 實際應用場景

   (1) 量子引力與單圈有效作用量（One-loop Effective Action）

(2) 譜不變量

(3) 路徑積分的正規化

應用 S^3 的譜到熱核方程，讓我們能從純代數的特徵值級數 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-k(k+2)t}$ 中，提取出三維球面的體積、曲率以及拓撲特徵。