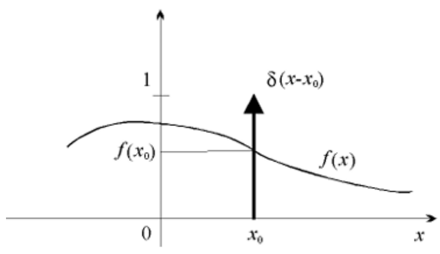
Green function [Spec302-2]

§ 先解釋何謂 Dirac 函數。嚴格說應該是說 Dirac 分布(一種廣義函數)：

δ(x)= $\begin{cases} 1, x=0 \\ 0, x\neq 0 \end{cases}, \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$



Sifting property of the Dirac distribution.

若 f(x)是一連續函數則

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), x_0\in(x_1,x_2)$$

Green 函數 G(x,s)主要用於解線性非齊次微分方程 L[u(x)]=f(x)，$L[G(x,s)]=\delta(x-s)$，線性算符對於單位脈衝(Dirac delta 函數)的響應，藉此通過疊加原理解一般非齊次項。

找到 G(x,s)後 則$u(x)=\int G(x,s)f(s)ds$

1. G(x,s)滿足邊界條件
2. G(x,s)在 x=s 是連續函數
3. $\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} L[G(x,s)]dx = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\delta(x-s)dx = 1$

例

$M=R^n, \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 我們要找一個函數 G(x)使得$\Delta G(x)=\delta(x)$

這就是格林函數的定義：它是 Laplace operator 的分佈反算子，即Δ^{-1}。

在一維情況，這等式變為：$\frac{d^2G(x)}{dx^2}=\delta(x)$

$$G(x)=-\frac{1}{2}|x|$$

在 R 上的熱方程$u_t-ku_{xx}=0$，其基本解為$\mathrm{G}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp(-\frac{x^2}{4kt})$稱為熱核(heat kernel)

$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=f(x,t), t>0 \\ u|_{t=0}=g(x) \end{cases}$的解為

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)g(y)dy+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

其中$\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)g(y)dy$寫成$(G*g)(x)$稱為 convolution(褶積)

以上是在 PDE 熱方程的簡單結論。其中 G(x,y)就是 Green 函數。

例　求解 $\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$ ， $u(x,0)=0$

f(x,t)是熱源函數，看作是無數個「瞬間點熱源」的疊加。

若熱源不是一個分布函數 f(x,t)，而是一個無限集中瞬間爆發的點熱源，系統會如何反應？

考慮 $\frac{\partial G}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-s)\delta(t-t')$

其中 $G(x,t;s,t')$ 就是我們要找的 Geen 函數，由 Fourier 變換可以找到 heat kernel

$G(x,t;s,t')=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha(t-t')}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha(t-t')})$　for　$t>t'$ 即為所求的 Green 函數。

假設熱脈衝在 $t'=0$ 時發生，則 $G(x,t;s,0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t})$

在時間 t' ，於位置 s，有一個強度為 $f(s,t')$ 的微小熱源，此為小熱源對後來溫度 u(x,t)的貢獻是 $f(s,t')\times G(x,t;s,t')$

疊加起來得，

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;s,t')f(s,t')dsdt'=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha(t-t')}}\exp(-\frac{(x-s)^2}{4\alpha(t-t')})f(s,t')dsdt'$$

格林函數實際上是通過與測試函數 ϕ 的積分來作用：

$u(x)=\int G(x,y)\phi(y)dy$ ，將 ϕ 映射到 u(x)，這符合分佈的定義。

§ 在譜理論中，格林函數與算子的譜分解（spectral decomposition）密切相關：

1. 離散譜與連續譜

(1) 若L 有離散譜（例如量子力學中的哈密頓算符），格林函數可以寫成特徵函數的級數： $G(x,y)=\sum_n\frac{\psi_n(x)\psi_n^*(y)}{\lambda}$

若利用特徵函數 $\phi_n(x)$ 與對應的特徵值 λ_n 來表達 Green 函數

$L\phi_n=\lambda_n\phi_n$

Green　函數滿足 $LG(x,\xi)=\delta(x-\xi)$

$\delta(x-\xi)$ 用特徵值展開 $\delta(x-\xi)=\sum_n a_n\phi_n(x)$　(由正交歸一)性

$a_n=\int\delta(x-\xi)\phi_n(x)dx=\phi_n(\xi)$　所以 $\delta(x-\xi)=\sum_n\phi_n(\xi)\phi_n(x)$

假設 $G(x,\xi)=\sum_n c_n\phi_n(x)$，則可得到 $c_n\lambda_n=\phi_n(\xi)$

所以 $G(x,\xi)=\sum_n \frac{\phi_{n(x)}\phi_n(\xi)}{\lambda_n}$

(2) 若L 有連續譜（例如自由粒子的 $-\Delta$ ），格林函數可能涉及積分：

$G(x,y)=\int \frac{\psi_k(x)\psi_k^*(y)}{k^2}dk$

2. 解析延拓與譜測度

例

1. 一維薛丁格算子

考慮 $L=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$，其 Green function $G(x,y;\lambda)$ 滿足：

$(L-\lambda)G(x,y;\lambda)=\delta(x-y)$

2. Laplace operator 的 Green function

在 R^3 中，$-\Delta$ 的 Green function 是 $G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}$

它在 x=y 處不可積，但作為分佈，可以通過正則化（如傅立葉變換）定義其作用。

§ 為什麼基本解是分佈？

1. **初始條件涉及 δ 函數**：$K(x,0)=\delta(x)$ 不是普通函數，而是分佈（廣義函數）。
2. **積分表示解**：熱方程的解可寫成卷積：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\,u_0(y)\,dy,$$

其中 $u_0(y)$ 是初始條件。這正是分佈（格林函數）與函數的作用方式。

3. **奇異性**：當 $t\to 0^+$，$K(x,t)$ 收斂到 δ 函數，這在傳統函數空間無法描述，必須用分佈理論。

熱方程的基本解不僅是 Green 函數的特例，也是分佈理論和譜理論在偏微分方程中的經典應用。

§ 習作

1. 對於一般的 Sturm-Liouville 算符 $L=\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}]+q(x)$，其 Green 函數 $G(x,\xi)$

在 $x=\xi$ 處的一階導數跳變條件為何？

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[G'(\xi+\varepsilon,\xi)-G'(\xi-\varepsilon,\xi)]=\frac{1}{p(\xi)}$

2.