

§ The Laplacian on a Riemannian manifold

Rellich embedding theorem :

在什麼樣的條件下，一個函數序列的「導函數有界」，可以推導出這個序列本身存在一個「強收斂」的子序列。

在處理偏微分方程時，我們經常需要證明某個問題「存在解」。通常的套路是：

1. 構造一組「近似解」序列。
2. 證明這組序列在某個能量空間（如 $W^{1,p}$ ）中是有界的。
3. 利用 **Rellich 定理**，說明這組序列存在一個在 L^q 中收斂的子序列。
4. 證明這個收斂到的極限函數就是我們要找的「解」。

Poincare 不等式 $\int_{\Omega} u^2 dx \leq C \int_{\Omega} |u|^2 dx$ [AI001]

$$J(u) = \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} \geq \frac{1}{C}, \quad \text{Rayleigh Quotient } R(u) = \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}$$

概念	物理/幾何意義	數學角色
Poincaré 不等式	限制了函數的「振幅」不能超過其「波動能量」。	提供空間的嵌入性質與穩定性估計。
Rayleigh Quotient $J(u)$	系統的單位能量（例如震動頻率）。	用於尋找算子的特徵值與特徵函數。
Rellich 定理	確保從「波動有界」能推導出「實體收斂」。	橋樑 ：用來證明上述最小值確實存在。

這時候函數空間是 Sobolev 空間 $H := H^{1,2}(M)$ （1 表示一階導數，2 表示使用 L^2 範數。）這些函數及其導數的「平方和」積分後必須是有限的（即具有有限能量）。

$$J(u) = \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx} : \text{分母是函數在 } L^2 \text{ 的大小，分子是 Dirichlet 能量。}$$

The Laplace-Beltrami operator $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j})$

$$dV = dV_g = \sqrt{\det(g)} dx$$

$$f \in H^{1,2} \quad f \neq 0 \quad \Delta f(x) = \lambda f(x) \quad \text{for all } x \in \Omega$$

f 稱為 Δ 的 eigenfunction

$\lambda(f, f) = (\Delta f, f) = (df, df) \geq 0$ 所以特徵直非負。

Theorem 3.2.1 *Let M be a compact Riemannian manifold. Then the eigenvalue problem*

$$\Delta f = \lambda f, \quad f \in H^{1,2}$$

has countably many eigenvalues with pairwise orthonormal vectors v_m , also

$$(v_m, v_\ell) = \delta_{m\ell}, \quad (3.2.11)$$

$$\Delta v_m = \lambda_m v_m,$$

$$(dv_m, dv_\ell) = \lambda_m \delta_{m\ell}. \quad (3.2.12)$$

Except for the eigenvalue $\lambda_0 = 0$ realized for a constant as its eigenfunction, all eigenvalues are positive and

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty.$$

For $f \in L^2(M)$, we have

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f, v_i) v_i, \quad (3.2.13)$$

where this series converges in L^2 and if $f \in H^{1,2}(M)$, we also have

$$(df, df) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, v_i)^2. \quad (3.2.14)$$

§ The eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator of a Riemannian manifold M determine its Green function and heat kernel。

黎曼流形的 Laplace-Beltrami 算子的譜(即特徵值與特徵函數 λ_k, ϕ_k) 決定了它的

Green 函數與熱核：

假設 M 是一個緊緻黎曼流形，其 Laplace-Beltrami 算子 Δ_g 有一組正交規範的特

徵函數 $\{\phi_k\}$ 及其對應的特徵值 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ 。

熱核 $K(t, x, y)$ 描述了熱量隨時間 t 在流形上從 x 擴散到 y 的機率密度。它可以用

特徵對表示為：
$$K(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \phi_k(x) \phi_k(y)$$

Green 函數 $G(x,y)$ 是 Laplace 方程 $\Delta u = f$ 的基礎解(通常針對 Poisson 方程或正定算子 $\Delta + k^2$)。在緊緻流形上，對於去除了零特徵值的算子，其 Green 函數為：

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\lambda_k}$$

這本質上是熱核在時間上的積分 $G(x, y) = \int_0^{\infty} K(t, x, y) dt$ [\[Spec106\]](#)

例如 周長為 L 的圓周 S^1 上 [\[Spes403\]](#)

特徵函數 $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi nx}{L}}$ 其中 $n \in \mathbb{Z}$

特徵值 $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2$

熱核函數為 $K(t, x, y) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_n t} e^{i\frac{2\pi n(x-y)}{L}}$

這是一個經典的 **Jacobi Theta 函數**。

- **物理意義**：當 $t \rightarrow 0$ 時，熱核趨近於 Dirac δ 分佈。
- **幾何意義**：透過 **Poisson 求和公式**，這個級數可以轉化為歐幾里得空間熱核在整數格點上的疊加。這展現了局部幾何（歐式空間）與全局幾何（圓環）的聯繫。

C. 構造 Green 函數

對於 S^1 ，Green 函數滿足 $\Delta G(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{L}$ （減掉常數項是因為緊緻流形上常數函數在核心裡）。

$$G(x, y) = \frac{1}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{i\frac{2\pi n(x-y)}{L}}}{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}$$

這是一個傅立葉級數，其結果是一個二次多項式（在區間內），代表了圓環上的靜電勢分佈。

透過譜分解（Spectral Decomposition），我們可以看到：

1. 熱核 是時間演化算子 $e^{-t\Delta}$ 的核，它告訴我們流形的擴散性質。
2. Green 函數 是算子 Δ^{-1} 的核，它告訴我們流形的靜態響應性質。

兩者都完全由特徵值與特徵函數這組「結構基石」所建構。

熱核漸近展開與曲率：

$$p(t, x, x) \sim (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (u_0(x, y) + u_1(x, y)t + \dots) \text{ 其中 } u_0(x, x) = 1$$

Weyl 估計：(特徵值記數函數)

N 是小於或等於 λ 的特徵值(含重數)個數，則 $N(\lambda) \sim \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \text{Vol}(M) \lambda^{n/2}$ as

$n \rightarrow \infty$ 其中 ω_n 是 R^n 中 n 維球的體積。 $N = \dim(M)$

Weyl 定律描述的是，當特徵值趨向無窮大時，它們的數量增長速度，完全由流形的維數和體積決定。

這個估計之所以重要，是因為它直接連通了離散的譜（我們聽到的「音高」）和連續的幾何（我們看到的「形狀」）。

它也是我們上次提到的「熱核」展開的一個直接推論。熱核的跡（trace）可以做漸近展開，而這個展開的第一項係數，正好就給出了 Weyl 定律中的主項。

Cheeger 估計回答的則是「第一個非零特徵值可以有多小」：(Cheeger 不等式)

$$h(M) := \inf \frac{\text{Vol}_{n-1}(S)}{\min(\text{Vol}(M_1), \text{Vol}(M_2))}$$

想像一個鼓面（二維流形）。如果這個鼓面中間有一個非常窄的「脖子」（例如一個啞鈴形的鼓），那麼它振動起來會非常困難，基頻（即第一個非零特徵值）會非常低。反之，如果一個鼓面很圓潤，沒有狹窄的瓶頸，它的基頻就會比較高 ⁴。

Cheeger 常數 $h(M)$ 正是用來量化這個「瓶頸」的幾何量。對於一個緊緻黎曼流形 M ，Cheeger 常數的定義是 ¹⁰：

$$h(M) = \inf_N \frac{\text{area}(N)}{\min(\text{vol}(A), \text{vol}(B))}$$

- N ：所有能將 M 分割成 A 和 B 兩部分的超曲面（在二維流形中就是曲線）。
- $\text{area}(N)$ ：這個分割面的面積（或長度）。
- $\min(\text{vol}(A), \text{vol}(B))$ ：被分割成的兩部分中，體積較小者的體積。

這個比值的下確界（infimum）就是 Cheeger 常數。

它衡量的是：用一個最小的「切口」去切開流形，這個切口的面積與被切掉的最小那塊體積之比能有多小。這個比值越小，就意味著流形存在越明顯的「細頸」。

Cheeger 證明了 $\lambda_1(M) \geq \frac{h(M)^2}{4}$

Federer coarea formula：

Theorem For every open $\Omega \subset M$ and every smooth function ϕ on Ω , we have

$$\int_{\Omega} \|d\phi\| = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Vol}_{d-1}(\phi^{-1}(t) \cap \Omega) dt, \quad (3.2.31)$$

where Vol_{d-1} indicates the $(d-1)$ -dimensional volume of a hypersurface. \square

Exercise

Given $u, v \in C^\infty(M)$, show that $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle_g + u\Delta v$

Example

Suppose that (M, g) is a Riemannian manifold, $ds^2 = h(x, y)(dx^2 + dy^2)$, where

$h(x, y) > 0$

Show that $-\Delta = -\frac{1}{h(x, y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

§ The Laplacian on a flat torus

Consider a two-dimensional flat square torus $T_a^2 = \mathbb{R}^2 / (a\mathbb{Z})^2$, find the eigenvalues and eigenfunctions

在 T_a^2 上, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $T_a^2 = \mathbb{R}^2 / (a\mathbb{Z})^2$ 表示 (x, y) 與 $(x+am, y+an)$ 視為等同, 即特徵函數 ϕ 滿足

$$\phi(x+a, y) = \phi(x, y), \phi(x, y+a) = \phi(x, y)$$

透過傅立葉分析 (考慮週期性條件), 特徵函數和特徵值可明確給出。最自然的解是平面波型。

1. 分離變數法: 假設 $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$, 代入 $\Delta\phi = \lambda\phi$
2. 在 x 方向, 週期 a 的特徵函數為 $\exp(2\pi imx/a)$, $m \in \mathbb{Z}$, 特徵值為

$$-(2\pi m/a)^2; \text{ y 方向類似。}$$

3. 二維組合: 特徵函數取乘積, 特徵值相加。

$$\text{特徵值 } \lambda_{m,n} = \frac{4\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$$

對應的特徵函數 $\varphi_{m,n}(x, y) = e^{2\pi i\left(\frac{mx+ny}{a}\right)}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

1. 特徵值的重數 (multiplicity):

- 特徵值 $\lambda_{m,n}$ 僅依賴於 $m^2 + n^2$ (而非 m 和 n 的符號或順序)。
- 因此, 不同的整數對 (m, n) 可能給出相同的特徵值 (當 $m^2 + n^2$ 相同時)。例如:
 - 對於 $m^2 + n^2 = 1$, 對應的 (m, n) 有 $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$, 特徵值 $\lambda = -\frac{4\pi^2}{a^2}$ 的重數為 4。
 - 當 $m = n = 0$ 時, 特徵值 $\lambda_{0,0} = 0$ 的重數為 1 (對應常數函數)。
- 特徵值的重數等於能寫成 $m^2 + n^2 = k$ 的整數對 (m, n) 的數量 (其中 k 是固定非負整數)。