Isometries of Spacetimes without observer horizons

Abdelghani Zeghib

我問 Abdelghani Zeghib 在測地線流的貢獻：

Zeghib 特別研究了**洛倫茲幾何中的測地線流**，並探討這些流在**洛倫茲流形 (Lorentzian Manifolds)** 上的**對稱性**和**剛性性質**。他嘗試回答的核心問題包括：

- **哪些洛倫茲流形允許完整且結構穩定的測地線流？**
- **測地線流的動力行為如何反映底層流形的幾何和拓撲特徵？**
- **在洛倫茲空間中，測地線的穩定性與時空奇異性（如黑洞）之間有何關聯？**

在高對稱性的空間（如對稱空間或均勻流形）中，測地線流往往受到李群作用的高度約束。Zeghib 研究了這些流在**李群和等距群 (Isometry Groups)** 下的表現，以及這些對稱性如何引發**幾何剛性現象**。

測地線流作為連結**幾何**、**拓撲**、**動力系統**以及**數學物理**的橋樑，為理解複雜幾何結構中的運動提供了深刻的數學框架。Zeghib 的工作正是探索這些深層聯繫的前沿。

在廣義相對論中，時空被建模為一個四維**洛倫茲流形 (Lorentzian manifold)**，具備以下特點：

- **流形 (Manifold)：** 四維空間 (三維空間 + 一維時間)。
- **洛倫茲度量 (Lorentzian metric)：** 一種具有簽名 $(-+++)$ 或 $(+---)$ 的度量張量，用來測量時空中的距離和時間間隔。
- **光錐結構 (Light Cone Structure)：**
  洛倫茲度量決定了每個時空點的光錐 (light cone)，用以區分事件之間的**因果關係**：
  - **時間樣 (Timelike)：** 允許因果影響的事件序列（例如粒子的運動）。
  - **光樣 (Null/Lightlike)：** 光子或其他零質量粒子的路徑。
  - **空間樣 (Spacelike)：** 沒有因果關係的事件。

- **時間樣測地線 (Timelike geodesics)：** 描述具有質量的粒子或觀測者在重力場中的自由落體運動。
- **光樣測地線 (Null geodesics)：** 描述光子在時空中的傳播路徑。
- **空間樣測地線 (Spacelike geodesics)：** 雖無直接物理意義，但在數學上有助於研究時空的結構。

Lorentzian geometry 在廣義相對論的核心應用：

1. 黑洞 Kerr manifold(旋轉黑洞的幾何模型) Schwarzschild manifold 都是 Lorentzian maifold 的具體模型
2. 宇宙學
3. 時空奇異性
4. 因果結構

應用領域	洛倫茲幾何角色	相關模型/理論
黑洞物理	定義事件視界、測地線終止於奇異性	Schwarzschild、Kerr 度量
宇宙學	FRW 度量描述宇宙的膨脹與大尺度結構	ΛCDM 模型、暴脹理論
引力波	測地線的微擾分析描述引力波在時空中的傳播	LIGO、Virgo 實驗
時空拓撲分析	分析時空的可遍歷性及拓撲性質	拓撲場論、AdS/CFT 對應

甚麼是測地線可積性(geodesic integrability)？

- 測地線的運動可以由**Hamiltonian 系統**來描述。對於一個黎曼或洛倫茲流形 (M, g)，測地線方程可以從哈密頓量 H 中推導而出：

$$H(x,p) = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j$$

其中 x 是流形上的點，p 是對應於切空間的動量座標。

- **完全可積性 (Complete Integrability)** 指的是可以找到足夠多的彼此對易的守恆量（積分不變量），使得測地線方程可以通過積分在封閉形式下解出。

測地線流的可積性通常依據**Liouville 可積性**的標準定義：

- 對於一個 n 維流形，如果存在 n 個彼此對易的守恆量 $F_1, F_2, \ldots, F_n$，且這些守恆量在相空間中彼此獨立，則該測地線流被稱為**Liouville 可積**。
- 數學上表示為：

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \text{對所有 } i, j$$

其中 $\{\cdot, \cdot\}$ 表示 Poisson 括號。

測地線方程的可積性與流形的幾何特性密切關係，特別是：

1. Symmetry of the manifold
   (1) 高度對稱的空間往往允許可積的測地線流
   (2) Killing vector field 與 Killing tensor 用來構造守恆律
   (3) 若流形上存在夠多的 Killing field 則測地線往往是可積的
2. Curvature conditions
   (1) 負曲率流形測地線流通常出現混沌行為 難以可積
3. Difference between Riemannian and Lorentzian manifolds

Abdelghani Zeghib 特別關注**洛倫茲流形上測地線流的可積性**及其在物理和幾何中的應用。他的研究重點包括：

- **對稱性與測地線可積性之間的關係**
- **Lorentzian 幾何中測地線流的剛性問題**
- **可積性條件下的時空分類**
- **在複雜時空背景（如旋轉黑洞或宇宙模型）中，測地線流動態行為的數學描述**

Lorentzian manifold

測地線可積性的一個標誌是**Hamilton-Jacobi 方程 (HJE)** 的可分性。HJE 給出為：

$$g^{ij}(x)\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = -m^2$$

其中 S 是作用量 (action)，m 是粒子的質量。

- 若 S 可以分解為單獨座標的和：

$$S = S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi)$$

  則測地線方程是可積的。這種可分性在 Schwarzschild 和 Kerr 度量中都成立。

Invariant Cauchy temporal function

isometry group Isom(M,g)

Lorentzian metrics on the torus with non-compact isometry group

Causal curves

Compact Cauchy surface

Theorem 1.1. *Let (M, g) be a causal spacetime satisfying the no observer horizons condition. Then the group $\mathrm{Isom}^{\uparrow}(M, g)$ of time orientation preserving isometries acts properly on M.*

Corollary 1.2. *There exists a Cauchy temporal function $\tau\colon M \to \mathbb{R}$ such that the action of $\mathrm{Isom}^{\uparrow}(M, g)$ on M preserves the gradient one-form $d\tau$.*

Corollary 1.3. *The isometry group splits as a semi-direct product*

$$\mathrm{Isom}^{\uparrow}(M, g) = L \ltimes N, \tag{1}$$

where N is a compact Lie group, and L is either trivial, $\mathbb{Z}$, or $\mathbb{R}$. Any function τ as in Corollary 1.2 is preserved by N, while L acts on τ by translations. In the case that $L = \mathbb{R}$, the connected component of the identity splits as a direct product

$$\mathrm{Isom}^{\uparrow,0}(M, g) = \mathbb{R} \times N^0.$$

Lie groups

Group actions

Theorem 2.3. *The isometry group $\mathrm{Isom}(M, g)$ of a semi-Riemannian manifold (M, g) acts freely and properly on the orthonormal frame bundle $O(M)$.*

Lorentzian geometry

1. A note on invariant temporal functions O.Muller
2. The group of isometries of a Riemannian manifold S.B.Myers and N.E.Steenrod