

## 黎曼幾何筆記

### 第一章 可微分流形



1. 向量場 旋量 Spinor
2. 奇點的標數 Gauss-Bonnet 定理(切線轉角定理是特例)與 Hopf-Poincare 定理
3. 散度定理(Divergence)：通量對體積的變化率是 Stokes 定理的特例 從古典微分幾何推廣到 manifold 上
4. [Parallel and Foucault]
5. Lie groups
6. 習題

### 第二章 Differential forms

#### 1. Differential forms

(1) [Differential forms]把計算整合起來 例如[Stokes 定理] [Structure equation]

2. 何謂可積 [Frobenius theorem]有兩種形式 (1)vector field (2)differential form
3. 習題

### 第三章 黎曼流形

#### 1. (1)Levi-Civita connection (2)自旋聯絡

(1) 在曲率的脈絡上 [Christoffel symbols]給廣義相對論提供了數學(計算)基礎 用 [Euler-Lagrange equation](#)[[R.Herman](#)]可方便求之

2. 正交活動標架法
3. (1) Covariant derivative (2) parallel transport (3)傅科擺
4. Calculus on Riemann Manifold
  - (1) [Lie derivative](#) (2)covariant derivative (3)外微分 (4) [Killing fields](#) 何謂對稱
  - (2) 流形上有三種運算，[Cartan magic formula]把它們串起來
5. Exponential map

指數映射 是一個局部的可微同胚(local diffeomorphism) 可以建構(1)正則鄰域 (2)Jacobi field

#### 6. Geodesics

7. Hopf-Rinow theorem
8. (1)[S^2](#) (2) [IxS^2](#) (3)[S^3](#) (4)Hyperbolic plane
9. 習題

#### 第四章 曲率

1. Metrics 黎曼流形(M, g)度量決定流形的性質

[Induced metric]

2. Curvature 作用在物質上顯現出重力 energy-momentum 影響時空 創造出曲率
3. 黎曼曲率張量 等長變換(isometry)

(1) 截面曲率 sectional curvature

(2) [Ricci curvature](#) 據說反映非歐幾何中體積的扭曲。

(3) scalar curvature

4. Jacobi fields
5. Gauss-Bonnet theorem
6. 幾何與廣義相對論中的[純量曲率](#)

**Ricci** 曲率是曲率張量的跡(trace)，是曲率的某種平均值，它滿足比安奇恆等式，奇妙地可以看成一條守恆率，愛因斯坦利用了這條守恆律來把重力幾何化，從此我們不再視重力為物體之間的吸引力。[丘成桐]

7. 習題

#### 第五章 幾何力學

1. 把童年中的 [Spinning top](#) 與 [Killing field](#) 連接起來，順便看一下 SO(3) 算一下  $L_x g$

---

#### 書目與參考資料

- |   |   |
|---|---|
| 1. An Introduction to <a href="#">Riemannian Geometry</a> | Jose Natario  |
| 2. <a href="#">Riemannian Geometry</a>                    | Manfredo P. do Carmo  |
| 3. <a href="#">Spacetime and Geometry</a>                 | Sean Carroll [ <a href="#">ProfoundPhysics</a> ]              |
| 4. 物理學家用 <a href="#">微分幾何</a> 侯伯元 侯伯宇                     | 檔名 DGforP   |
| 5. <a href="#">Differential Geometry</a> in Physics       | <a href="#">Gabriel Lugo</a> [ <a href="#">ResearchGate</a> ] |
| 6. <a href="#">Geometry of Manifolds</a>                  | Richard L. Bishop   |

- |   |  |
|---|--|
| 7. Lectures on Geometry of Manifolds  | Liviu I. Nicolaescu                                      |
| 8. 大域微分幾何   | 黃武雄  |
| 9. 微分幾何講義   | 陳省身  |
| 10. Differential Geometry   | 杜武亮  |
| 11. An Introduction to Manifolds  | 杜武亮  |
| 12. Differential Forms and Connections  | Richard W.R. Darling                                     |
| 13. <a href="#">Differential Forms</a> for Physics Students   | <a href="#">William O. Straub</a>                        |
| 14. A course in modern mathematical physics   | <a href="#">Peter Szekeres</a>                           |
| 15. Differential Geometry with Application to Mechanics and Physics   | Yves Talpaert  |
| 16. Mathematical physics : Classical Mechanics  | Andreas Knauf  |
| 17. Differential forms with applications to the physical sciences   | Harley Flanders  |
| 18. A Course in Differential Geometry by <a href="#">Thierry Aubin</a> (1942~2009) <a href="#">Yamabe problem</a> |  |
| 19. 教科書/參考書書評 <a href="#">[Books]</a>   | <a href="#">[Differential Geometry 論壇]</a>               |
| 20. Riemannian Geometry   | <a href="#">Peter Petersen</a> <a href="#">Exercises</a> |
- 

1. [\[時空的樂章---引力波百年漫談\]](#)
2. [\[相對論中一些未解決的問題\]](#)
3. [黎曼流形與人工智能](#) [\[The Manifold Ways of Perception\]](#) [黎曼流形與流形學習](#)
4. [\[John Lighton Synge 1897~1995\]](#) [\[GR:Papers in honour of J.L.Synge\]](#)  
[潮汐力\(tidal force\)](#) [\[Distant star moved by tides\]](#) [\(原文\)](#)  
Jacobi field and Tidal Effects in Kerr spacetime
5. 微分幾何(幾何分析) 老顧有真實本領：[\[ResearchGate\]](#) [\[Homepage\]](#)  
將幾何分析推廣到工程實踐是老顧銘記在心的[歷史使命](#) [\[A new Gold Age of Minimal Surfaces\]](#) [\[我看 Antoni Gaudi\]](#)  
這裡有提到 Ricci flow 的應用  
顧險峰先生的 3D 世界 與 Computational Conformal Geometry  
微分幾何的逼近理論(1) (2)
6. [宇宙論\[FLRW model 參考書目\(1\) p.284 CH 6.6\]](#)
7. [\[丘成桐\]](#) [\[從細胞世界看微分幾何\]](#)(林俊吉)