

§ 弧長的第一、二變分式 Huang p.189, p.193

$$T = \frac{\partial}{\partial t}, V = \frac{\partial}{\partial s} \text{ (變分向量場)}$$

$$L'(0) = \langle V, T \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T \rangle dt$$

$$L''(0) = - \int_a^b \langle \nabla_T^2 V + R(V, T)T, V \rangle dt$$

Synge theorem :

設 M^{2n} 是偶數維、封閉，可定向之黎曼流形且 $K_M > 0$ ，則 M 必為單連通。

§ 1 基本概念回顧

1. 測地線
2. 變分向量場
3. 弧長第二變分
4. Jacobi field

§ 2 Jacobi field 的定義與起源

1. 為何 Jacobi field 是測地線的變分向量場？

考慮一族測地線組成的變分（即每個 $\gamma_s(t)$ 都是測地線）。變分向量場 $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t) \Big|_{s=0}$ 滿足 Jacobi 方程。這是因為測地線方程 $\nabla_T T = 0$ 對 s 微分後（利用曲率張量的定義 $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ ），可得：

$$\nabla_T^2 V + R(V, T)T = 0$$

這正是 Jacobi 方程（與您提供的公式一致）。因此，Jacobi field 是「測地線變分」的變分向量場，描述了測地線在無窮小變形下的行為。

2. 幾何意義 Jacobi field 衡量測地線的「發散」程度。例如，在球面上，沿大圓的 Jacobi field 可以表示鄰近大圓的收斂或發散。

§ 3 弧長第二變分式的結構

$$L''(0) = - \int_a^b \langle \nabla_T^2 V + R(V, T)T, V \rangle dt$$

被積函數中的 $\nabla_T^2 V + R(V, T)T$ 稱為 Jacobi 算子，用 $A(V) = \nabla_T^2 V + R(V, T)T$ 表示。

$$\text{第二變分式可重寫為 } L''(0) = - \int_a^b \langle A(V), V \rangle dt$$

§ 4 Jacobi field 如何影響第二變分式

這裡是 Jacobi field 與弧長第二變分最密切的聯繫：當變分向量場 V 是 Jacobi field 時，Jacobi 算子 $A(V)$ 為零，從而直接簡化第二變分。

1. 數學推導

若 V 是 Jacobi field，則滿足 $A(V) = \nabla_T^2 V + R(V, T)T = 0$ (由 Jacobi 方程)。

代入第二變分式：

$$L^*(0) = - \int_a^b \langle 0, V \rangle dt = 0$$

這意味著：沿 Jacobi field 方向的變分，弧長的二階變化為零。幾何上，這對應於「變分方向不改變弧長到二階」，即鄰近曲線與原始測地線「等長」到二階近似。

2. 幾何直觀

§ 5 共軛點的關鍵作用

1. 共軛點的定義
2. 與第二變分的關係
3. 例子

§ 6 總結與應用

幾何與物理：在廣義相對論中，Jacobi field 和共軛點用於分析光線的聚焦 (gravitational lensing) 和時空測地線的穩定性。

計算與優化：在算法中 (如計算測地線)，第二變分通過 Jacobi field 評估局部最小性。

弧長的第一變分式 $= 0 \Leftrightarrow \gamma$ 為測地線， $\nabla_T T = 0$

在 γ 式測地線的情況下看第二變分，研究測地線的穩定性。

Jacobi field 是測地線變分的變分向量場，它滿足 Jacobi 方程

$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, T)T = 0$ ，反映了流形曲率如何影響測地線族的收斂或發散。

從變分角度：當您考慮一族測地線時，其「偏移向量」自然成為 Jacobi field。

從方程角度：Jacobi 方程確保變分保持測地線性質，並在弧長第二變分中起關鍵作用。

[Huang 大域微分幾何]

弧長的第一變分式 p.189

弧長的第二變分式 p.193