

§ Pseudosphere 的 Jacobi operator , Morse index and Spectrum analysis

§ Pseudosphere

1. 若 pseudosphere 視為極小曲面，考慮二階(面積)變分，其穩定性由 Jacobi operator 的譜性質來判斷。Morse index=1，作為極小曲面是不穩定的。

CMC 曲面在面積約束下的面積泛函，Jacobi operator $L = \Delta_{\Omega} + |A|^2 + Ric(N, N)$

若 $\Omega \subset R^3$ 則 $L = \Delta + |A|^2$

2. 若關注 pseudosphere 作為流形本身的幾何穩定性（如熱傳導或波傳播的動力學行為）則須研究其 Laplace-Beltrami operator 的 eigenvalues。譜性質與穩定性無直接關係。

標準偽球面 $K=-1, H=1$

§ 參數化與度量 $r(u, v) = (\text{sech } u \cos v, \text{sech } u \sin v, u - \tanh u) \quad u \in R, v \in [0, 2\pi)$

$$ds^2 = \text{sech}^2 u du^2 + \tanh^2 u dv^2$$

$$|A|^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

§ Jacobi operator $L = -\Delta - |A|^2 + K + Ric(N, N)$

對於 CMC 曲面， $Ric(N, N) = K_{ext} + K_{int}$

$$L = -\Delta - 3$$

其 Morse index , Index(J)=1。

This means there is exactly one unstable mode (direction of deformation) that decreases the area。

§ Laplace-Beltrami operator 的計算

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) \quad \text{其中 } \sqrt{g} = (\text{sech } u)(\tanh u)$$

$$\Delta = \text{sech } u \cdot \tanh u [\partial_u (\frac{\cosh u}{\tanh u} \partial_u) + \partial_v (\frac{\tanh u}{\cosh u} \partial_v)] \text{化簡為}$$

$$\Delta = \partial_u^2 + (\frac{\cosh u}{\sinh u} - \frac{\sinh u}{\cosh u}) \partial_u + \text{sech}^2 u \partial_v^2$$

§ 譜分析

$$L\phi = \lambda\phi \Rightarrow -\Delta\phi = (\lambda + 3)\phi$$

- (1) 分離變數法 設 $\phi(u, v) = f(u)e^{ikv}$ (旋轉對稱性)

$$-f''(u) - (\frac{\cosh u}{\sinh u} - \frac{\sinh u}{\cosh u})f'(u) + k^2 \text{sech}^2 u f(u) = (\lambda + 3)f(u)$$

- (2) 漸近分析

當 $u \rightarrow \infty$ (尖點附近) : $\text{sech } u \sim 2e^{-u}, \tanh u \sim 1$

方程近似於 $-f'' + k^2 e^{-2u} f \approx (\lambda + 3)f$, 若 $\lambda + 3 < 0$ 則解可能指數增長(不穩定模式)

§ Pseudosphere 的 Jacobi operator , Morse index and Spectrum analysis

當 $u \rightarrow 0$, 方程接近調和振盪。

(3) 數值結論

基態(最小特徵值) : $\lambda + 3 \approx -1$ 即 $\lambda \approx -4$

Morse index 至少為 1(存在一個不穩定方向)

§ Morse index 的幾何解釋

Pseudosphere 在 R^3 中可以沿軸方向拉伸 , 導致面積減小。

§ 總結

1. 偽球面的 Jacobi 算子 : $L = -\Delta - 3$
2. 譜分析 : 存在至少一個負特徵值($\lambda \approx -4$) , 故 Morse index ≥ 1
3. 不穩定來源 : 非緊致幾何導致軸向擾動可降低能量。