

§ 與變分法有關的 PDE 習題

考慮定義在區域 Ω 的 Dirichlet 積分 $J[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ ，在滿足邊界條件 $u|_{\partial\Omega} = g$ 的函數集合中，若 u 是該積分的極小化函數，則 u 在 Ω 內滿足 Laplace equation $\Delta u = 0$ ，試證之。

設 u 是 Dirichlet 積分的極小化函數，任取一測試函數 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ，且在 $\partial\Omega$ 附近為零。

$$J[u + \varepsilon\phi] = \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon\phi)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u + \varepsilon\nabla\phi|^2 dx = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon\nabla u \cdot \nabla\phi + \varepsilon^2 |\nabla\phi|^2) dx$$

因為 u 是極小化函數，當 $\varepsilon = 0$ 時 functional $J[u + \varepsilon\phi]$ 應達到最小值，一階變分

$$= 0 \quad \text{即} \quad \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\phi] \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\phi] = \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon\nabla u \cdot \nabla\phi + \varepsilon^2 |\nabla\phi|^2) dx = \int_{\Omega} (2\nabla u \cdot \nabla\phi + 2\varepsilon |\nabla\phi|^2) dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\phi] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} 2\nabla u \cdot \nabla\phi dx = 0 \quad \text{for } \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\phi dx = - \int_{\Omega} \phi \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \text{Green 恆等式}$$

$$= - \int_{\Omega} \phi \Delta u dx = 0 \quad (\text{因為 } \phi|_{\partial\Omega} = 0) \text{ 對所有的 } \phi \text{ 成立，所以 } \Delta u = 0$$