[Spacetime and Geometry]　Sean Carroll
Ch 3 p.107
求 geodesic equation 有多種方法，用 Euler-Lagrange 方程式是其一。
c.f. Geodesics

這裡考慮對 proper time functional $\tau=\int\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda$ 作變分。

$I=\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}d\tau$ (這裡把參數從一般的 λ 改成 τ ，不十分明白。)
考慮路徑的無窮小變分(infinitesimal variations)下積分的變化
$x^{\mu}\to x^{\mu}+\delta x^{\mu}$

$g_{\mu\nu}\to g_{\mu\theta}+(\partial_{\sigma}g_{\mu\nu})\delta x^{\sigma}$ (Taylor expansion in curved spacetime)

$$\delta I=\frac{1}{2}\int[\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\delta x^{\sigma}+g_{\mu\nu}\frac{d(\delta x^{\mu})}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}+g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{d(\delta x^{\nu})}{d\tau}]d\tau$$

後面兩項作分部積分，例如

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{d(\delta x^{\nu})}{d\tau}d\tau=\frac{1}{2}\{g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\delta x^{\nu}\Big|_a^b-\int\delta x^{\nu}\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau})d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}\int[g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}]\delta x^{\nu}d\tau$$

Where the variation δx^{μ} vanish at the end points of the path。

$$=-\frac{1}{2}\int[g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}]\delta x^{\nu}d\tau$$

After rearranging some dummy indices，

$$\delta I=-\int\left[g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}g_{\sigma\mu}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right]\delta x^{\sigma}\,d\tau.$$

Since we are searching for stationary points，we want δI to vanish for any variation δx^{σ}，this implies

$$g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}g_{\sigma\mu}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0,$$

and multiplying by the inverse metric $g^{\rho\sigma}$ finally leads to

$$\frac{d^2x^{\rho}}{d\tau^2}+\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}g_{\sigma\mu}-\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0.$$

The geodesic equation。

§ 弧長的變分

$\gamma:[0,l]\to M$ 是 M 上的可微曲線。

$\hat{\gamma}:[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ ，使得 $\hat{\gamma}(t,0)=\gamma(t)$ ，稱 $\hat{\gamma}$ 為 γ 的變分(variation)。

若 $\hat{\gamma}(0,s)=\gamma(0),\hat{\gamma}(l,s)=\gamma(l),\ for\quad \forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 則稱 $\hat{\gamma}$ 為 proper variation。

$\gamma_s=\gamma_s(t)\equiv\hat{\gamma}(t,s)$

$L(s)=\int_0^l\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|dt=\int_0^l<T,T>^{\frac{1}{2}}dt$ 是 γ_s 的長度。

Lemma 1 $\quad L'(s)=\int_0^l\frac{\partial}{\partial s}\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|dt$

證明

$$L'(s)=\lim_{h\to 0}\frac{L(s+h)-L(s)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^l(\left|\frac{d\gamma_{s+h}}{dt}\right|-\left|\frac{d\gamma_s}{t}\right|)dt}{h}$$

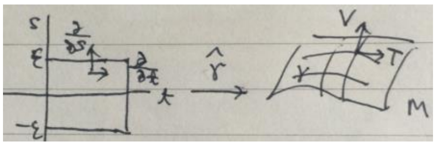
$$=\int_0^l\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{d\gamma_{s+h}}{dt}\right|-\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|}{h}dt$$

(在[0,l] 有 finite length 且 $\frac{\partial}{\partial s}\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|$ 存在 則 $\int_0^l$,$\lim_{h\to 0}$ 可交換。)

$$=\int_0^l\frac{\partial}{\partial s}\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|dt$$

Lemma 2 V(t),W(t)是沿 γ 的可微向量場，則

$$\frac{d}{dt}<V,W>=<\frac{DV}{dt},W>+<V,\frac{DW}{dt}>$$



取 $T=\frac{\partial\hat{\gamma}}{\partial t}=\hat{\gamma}_*(\frac{\partial}{\partial t}),V=\frac{\partial\hat{\gamma}}{\partial s}=\hat{\gamma}_*(\frac{\partial}{\partial s})$ 是定義在 $[0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的兩向量場。

令 $L(s)=\int_0^l\left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|dt=\int_0^l<T,T>^{\frac{1}{2}}dt$

假設在 γ 上 (s=0) $|T|=1$ ，則

$L'(s)=\int_0^l V<T,T>^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^l \frac{2<\nabla_V T,T>}{2<T,T>^{\frac{1}{2}}}dt$ (由 lemma 1)

($\int_0^l V<T,T>^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^l \frac{\partial}{\partial s}<T,T>^{\frac{1}{2}}dt$ ， $\frac{\partial}{\partial s}<T,T>^{\frac{1}{2}}=\frac{2<\frac{\partial}{\partial s}T,T>}{2<T,T>^{\frac{1}{2}}}$)

$L'(0)=\int_0^l <\nabla_v T,T>dt$

(M 上的 torsion 張量 T(X,Y)= $\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$

此處 ∇ is torsion-free (無撓) 即 T=0，且 $[T,V]=\hat{\gamma}_*[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}]=0$)

$T<V,T>=<\nabla_T V,T>+<V,\nabla_T T>$

$\int_0^l <\nabla_v T,T>dt=\int_0^l <\nabla_T V,T>dt=\int_0^l T<V,T>-<V,\nabla_T T>dt$

$=<V,T>\Big|_0^l-\int_0^l <V,\nabla_T T>dt$

此式依賴 V， 故寫成

$L'_V(0)=<V,T>\Big|_0^l-\int_0^l <V,\nabla_T T>dt$ 是弧長的一階變分式。

Do Carmo 書的寫法是

$L'(0)=-\int_0^l <A(s),V(s)>$ ，其中 $A(s)=\frac{D}{ds}\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,0)$ 稱為曲線 γ 的加速向量。

定理一.

(M,g)上的一條曲線 $\gamma=\gamma(t)$ ，設 $|T|=\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|=1$

$\hat{\gamma}$ 是 γ 的變分，V 為變分向量場 且 $V(0,0)=V(l,0)=0$

則 $L'_V(0)=0\Leftrightarrow\gamma$ 是測地線 (即在 γ 上 $\nabla_T T=0$)

給定一條測地線，上面的 Jacobi 場就是這條測地線上的測地變分場。
幾何上來說，它刻畫了流形上一條測地線「變動」到附近測地線的趨勢。

§ 弧長的第二變分式

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

截曲率(sectional curvature) $K(X,Y)=\dfrac{<R(Y,X)X,Y>}{|X\wedge Y|^{\frac{1}{2}}}$

Lemma 3 $\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}=\dfrac{D}{\partial t}\dfrac{\partial\gamma}{\partial s}$

以下 $T=\dfrac{\partial}{\partial t},V=\dfrac{\partial}{\partial s}$

$$L'(s)=\int_0^l V<T,T>^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^l\frac{<\nabla_V T,T>}{<T,T>^{\frac{1}{2}}}dt$$

$$L''(s)=\frac{d^2L}{ds^2}=\int_0^l V(\frac{<\nabla_V T,T>}{<T,T>^{\frac{1}{2}}})dt=\int_0^l(\frac{V<\nabla_V T,T>}{<T,T>^{\frac{1}{2}}}-\frac{<\nabla_V T,T>^2}{<T,T>^{\frac{3}{2}}})dt$$

當 s=0 時，$<T,T>=1,\therefore\nabla_T T=0$

$T<\nabla_V V,T>=<\nabla_T\nabla_V V,T>+<\nabla_V V,\nabla_T T>=<\nabla_T\nabla_V V,T>$ ...(*)

$$L''(0)=\left(\frac{d^2}{ds^2}L\right)_{s=0}=\int_0^l V(\frac{<\nabla_V T,T>}{<T,T>^{\frac{1}{2}}})dt\Big|_{s=0}=\int_0^l(V<\nabla_V T,T>-<\nabla_v T,T>^2)dt$$

In general [T,V]=0，所以$\nabla_V T=\nabla_T V$

其中 $V<\nabla_V T,T>=<\nabla_V\nabla_V T,T>+<\nabla_V T,\nabla_V T>=<\nabla_V\nabla_T V,T>+|\nabla_T V|^2$

因為[V,T]=0

$R(V,T)V=\nabla_V\nabla_T V-\nabla_T\nabla_V V-\nabla_{[V,T]}V=\nabla_V\nabla_T V-\nabla_T\nabla_V V$ 移項

$$\nabla_V\nabla_T V=R(V,T)V+\nabla_T\nabla_V V$$

兩邊對 T 做內積，且由(*)

所以$<\nabla_V\nabla_T V,T>=<R(V,T)V,T>+<\nabla_T\nabla_V V,T>=<R(V,T)V,T>+T<\nabla_V V,T>$

所以$V<\nabla_V T,T>=<R(V,T)V,T>+T<\nabla_V V,T>+|\nabla_T V|^2$

又$T<V,T>=<\nabla_T V,T>+<V,\nabla_T T>=<\nabla_T V,T>=<\nabla_V T,T>$

$$L''(0)=\int_0^l (<R(V,T)V,T>+T<\nabla_V V,T>+|\nabla_T V|^2-(T<V,T>)^2 dt$$

$$=\int_0^l (|\nabla_T V|^2-<R(V,T)T,V>)dt-\int_0^l (T<V,T>)^2 dt+(<\nabla_V V,T>)\Big|_0^l$$

定理

γ是(M,g)上的一條測地線，設$|T|=1$

對γ做變分$\hat{\gamma}$，V 是變分向量場，設<V,T>沿γ為常數 且在γ兩端點上 V=0

則$L''(0)=\int_0^l (|\nabla_T V|^2-<R(V,T)T,V>)dt=-\int_0^l <\nabla_T^2 V+R(V,T)T,V>dt$

這裡$K(T,V)\equiv<R(V,T)T,V>$是截曲率。

這裡顯示弧長的第二變分式與曲率關係。

c.f. JacobFields(測地線的變分)

設 $p,q\in M$ ，$\Omega_{pq}:=\{\gamma:\gamma$ 為 M 上連接 p 到 q 的C^∞-曲線}

長度 $L(s)=\int_0^l \left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|dt$ ，能量 $E(s)=\int_0^l \left|\frac{d\gamma_s}{dt}\right|^2 dt$ 。

在Ω_{pq}中

1. γ是 E 的 stationary point $\Leftrightarrow$ γ是測地線($\Rightarrow\gamma$是 L 的 stationary point)。
2. 設γ是測地線，在Ω_{pq}中考慮某二階變分，則$L''(0)\le 0\Leftrightarrow E''(0)\le 0$

p.194~196 有關於**測地線穩定性**的說明。

$L''(0)=-\int_0^l <\nabla_T^2 V+R(V,T)T,V>dt$ ， 其中$K(T,V)\equiv<R(V,T)T,V>$是截曲率。

截曲率越大，則$L''(0)$會越小，測地線越不穩定。以下 Synge 定理是這項觀察的應用。

§ Synge 定理

封閉的正曲率流形若為偶數維且可定向，則必為單連通。