§ 01 關於面積的變分

面積的第一變分有各種不同寫法，意思都是一樣的，即面積的變化率δA由均曲率 H，法向位移ϕ主導。

(1) $\delta A=\int_{\Omega} H\phi dA$ 曲面受法方向擾動$\delta r=\phi n$，但此處均曲率$H=\lambda_1+\lambda_2$

若$H=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$則寫成$\delta A=2\int_{\Omega} H\phi dA$。

(2) $A'(0)=-\int_M nH\varphi dM$ [大域微分幾何] p.440。

p.708 王慕道院士寫成$A'(s)=\int_{\Sigma_s} Hf$，f 是曲面沿法方向變動量，但是此處均曲率$H=\lambda_1+\lambda_2$。

(3) $\dfrac{d}{dt}A(\Sigma_t)\big|_{t=0}=-\int_{\Sigma}\langle v,H\rangle dA$，其中$\Sigma_t$是變分曲面族，$\Sigma_0=\Sigma$是 initial surface

先舉一實例：

在R^3中，給定一封閉曲線Γ，尋找以Γ為邊界的曲面Σ，使其面積最小。

$u:\Omega\subset R^2\to R$，$\Sigma=\{(x,y,u(x,y)\big|(x,y)\in\Omega\}$為函數 u 的圖(graph)，且邊界條件

$u\big|_{\partial\Omega}=\phi$($\phi$由$\Gamma$決定)

Σ的面積為$A[u]=\iint_{\Omega}\sqrt{1+|\nabla u|^2}dxdy$，其中$|\nabla u|^2=u_x^2+u_y^2$

對 functional A[u]做變分：

設$u\to u+\varepsilon\eta$ 其中η是任意的光滑函數，代表變形方向，$\eta\big|_{\partial\Omega}=0$。

則$\delta A=\dfrac{d}{d\varepsilon}A[u+\varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0}$

$$A[u+\varepsilon\eta]=\iint_{\Omega}\sqrt{1+|\nabla(u+\varepsilon\eta)|^2}dxdy=\iint_{\Omega}\sqrt{1+|\nabla u+\varepsilon\nabla\eta|^2}dxdy$$

其中$|\nabla u+\varepsilon\nabla\eta|^2=(\nabla u+\varepsilon\nabla\eta)\cdot(\nabla u+\varepsilon\nabla\eta)=|\nabla u|^2+2\varepsilon\nabla u\cdot\nabla\eta+\varepsilon^2|\nabla\eta|^2$

$$\delta A(u)=\frac{d}{d\varepsilon}A[u+\varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0}=\iint_{\Omega}\frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{1+|\nabla u+\varepsilon\nabla\eta|^2}dxdy\big|_{\varepsilon=0}$$

其中$\dfrac{d}{d\varepsilon}\sqrt{1+|\nabla u+\varepsilon\nabla\eta|^2}=\dfrac{\nabla u\cdot\nabla\eta+\varepsilon|\nabla\eta|^2}{\sqrt{1+|\nabla u+\varepsilon\nabla\eta|^2}}=\dfrac{\nabla u\cdot\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ as $\varepsilon=0$

所以$\delta A(u)=\iint_{\Omega}\frac{\nabla u\bullet\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dxdy$ ⋯面積的一階變分式。

由散度定理(integration by parts) $F\cdot\nabla\eta=div(\eta F)-\eta div(F)$，let $F=\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$

$$\frac{\nabla u\cdot\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}=div(\eta\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}})-\eta div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}})$$

在Ω上積分，由散度定理$\iint_{\Omega}div(\eta\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}})dxdy=\int_{\partial\Omega}\eta\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\cdot nds=0$

(因為$\eta|_{\partial\Omega}=0$)其中n是垂直邊界向外的單位法向量。

所以$\delta A(u)=\iint_{\Omega}\frac{\nabla u\bullet\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dxdy=-\iint_{\Omega}\eta div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}})dxdy$

臨界點條件($\delta A(u)=0$對所有η都成立)：

在Ω內，$div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}})=0$這是 minimal surface 方程式。

展開得$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$這是 minimal surface 的方程式，是一個 non-linear elliptic PDE。

$\delta A(u)=\iint_{\Omega}\frac{\nabla u\bullet\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dxdy$ ⋯面積的一階變分式。

再回頭看，$\delta A=\int_{\Omega}H\phi dA$與均曲率有關，以下是約略推導：

設曲面 S 由參數(u,v)，位置向量 r(u,v)，當曲面受到法向擾動，$\delta r=\phi(u,v)n$

表面積元素$dS=\sqrt{EG-F^2}dudv$的變分：

$$\delta(dS)=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}(\delta E\cdot E+E\cdot\delta G-2F\cdot\delta F)dudv$$

⋯

$=(\nabla\cdot(\phi n)-2H\phi)dS$ 其中$\iint_S\nabla\cdot(\phi n)dS=\oint_{\partial S}\phi n\cdot tdl=0$

所以$\delta A=\iint_S\delta(dS)=-2\iint_S H\phi dS$

§ 02 面積第二變分式

(1) $\delta^2 A = \iint_\Omega [|\nabla_\Omega \delta u|^2 - (2H^2 - K)(\delta u)^2] dA$，其中$\nabla_\Sigma \delta u$表示位移$\delta u$在曲面上的梯度。

(2) $A''(0) = \int_M L\varphi \bullet \varphi dM$ [大域微分幾何]p.455 其中$L = -\nabla_M - |A|^2$

(3) $\frac{\partial H}{\partial s} = -|A|^2 - Ric(N)$

p.708 王慕道：是一個他最喜歡的公式的前三名之一。

此式應用之一是導出 Laplace comparison theorem。

(1) 式中，$2H^2 - K = Ric(N, N) + |A|^2 = -\frac{\partial H}{\partial s}$

$\Sigma \subset M$：光滑嵌入的二維曲面

Σ_t：變分族，$\Sigma_0 = \Sigma$

$V = \frac{\partial \Sigma_t}{\partial t}\Big|_{t=0}$：變分(法向)向量場

若Σ為 minimal surface，則 H=0，需考慮二階變分以研究穩定性。

設 V=fN，其中 N 是單位法向量，$f \in C^\infty(\Sigma)$ 則二階變分為

$$\frac{d^2}{dt^2} A(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = \int_\Sigma (|\nabla f|^2 - (|A|^2 + Ric(N, N)) f^2) dA$$

其中 Ric(N,N)是背景流形的 Ricci curvature 在法向方向的值。

對所有 compact support 的變分函數，$\delta^2 \mathrm{A(f)} \geq 0$則稱$\Sigma$為穩定的極小曲面。若有某個變分 f，使得$\delta^2 A(f) < 0$ 則不穩定。

§ 03 在體積約束下的面積變分

封閉曲面$S = \partial\Omega$，其包圍的區域為Ω，體積為 V

求 V 不變，表面積 A 最小的曲面形狀

1. 定義泛函$J = A + \lambda(V - V_0)$
2. 表面積變分$\delta A = \iint_S H\phi dS$

   體積$V = \iiint_\Omega dV$，變分$\delta V = \iint_S n \cdot \delta r dS = \iint_S \phi dS$ (這裡用到散度定理)
3. 變分條件$\delta J = \delta A + \lambda \delta V = \iint_S H\phi dS + \lambda \iint_S \phi dS = \iint_S (\mathrm{H}\phi + \lambda\phi)\mathrm{S=0}$

因為ϕ是任意函數，所以$H = -\lambda$是一常數。

在體積約束下，有最小表面積的曲面是 CMC 曲面。

唯一滿足此一條件的封閉曲面是球面，$H=\frac{2}{R}$。

§ 04 CMC 曲面上的 Morse index theorem

雖然 Morse index theorem 都是在研究穩定性問題，但是沿測地線的 Jacobi 場與 CMC 曲面上的 Jacobi 場並不相同。

我們比較一下：

		測地線	CMC 曲面
1.	泛函	能量泛函 $E(\gamma)=\int_a^b\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 dt$	體積約束下的面積泛函
2.	Critical point	geodesic	CMC 曲面
3.	Morse index	共軛點數量	Jacobi operator L 的負 eigenvalues 數目
4.	穩定性	index=0 時測地線極小	index=0 時曲面時曲面穩定
5.	Operator		$L=\Delta_\Sigma+\|A\|^2+Ric(v,v)$

在 CMC 曲面的穩定理論中，Jacobi 場是描述體積守恆的條件下，曲面能否保持穩定平衡狀態的核心工具。

Ric(N,N)描述 M 沿法方向 N 的體積收縮率，Ricci 曲率影響到超曲面的穩性。

對於二為曲面$\Omega\subset R^3$，Ricci 曲率退化為高斯曲率 K，且 Ric(N,N)=K，此時公式退化為$\delta^2 A=\iint_\Omega[|\nabla_\Omega\delta u|^2-(K+|A|^2)](\delta u)^2 dA$

若$\delta^2 A\geq 0$，表示超曲面在形變之下是穩定的。

在愛因斯坦方程中，Ricci 曲率與物質分布有關…

§ 05 在 geometric flows 研究中的變分法

有許多的 geometric flows 可以視為某種 energy functional 的梯度流(gradient flow)，推導 geometric flow 並分析其穩定性與臨界點。

變分法有助於理解 singilar point 的結構。

在 Ricci flow 中 Perelman 引入 entropy functional 幫助控制了 fingular point 的形成，並證明了 singular point 附近趨近於 gradient shrinking solitons。

通過計算 energy functional 的第二變分，可以判斷臨界點的穩定性，例如 minimal durface 的穩定性。

1. Ricci flow $\frac{\partial g}{\partial t}=-2Ric(g)$，讓 metric g 沿著純量泛函的負梯度演化。
2. Mean curvature flow $\frac{\partial X}{\partial t}=-Hn$

   因為面積第一變分為$\delta A=\int_\Omega H\phi dA$，MCF 可視為 area functional 的 gradient flow。

RCF 是超曲面的外在 geometric flow，Ricci flow 是流形的內在 geometric flow。

MCF 的應用：(1)圖像處理 (2)黑洞視界的幾何演化 (3)材料科學

Open problem：

(1) 高維 MCF 的 singular point 分類

(2) 非平均凸曲面的長期行為

(3) Brakke flow 的正則性理論

3. Hamonic map flow $\frac{\partial\phi}{\partial t}=\Delta\phi$

是 Harmonic energy $E(\phi)=\frac{1}{2}\int|d\phi|^2\,dV$ 的 gradient flow。

§ 06 後記

1. PDE 是整個幾何分析的靈魂。
2. 面積的變分可視為一種能量變分，幾何分析中常將面積變分推廣為加權能量泛函。例如

   Willmore 能量：$W(\Sigma)=\int_\Sigma H^2 dA$ 彈性膜的彎曲能

   Ginzburg-Landau 能量

§ 07 參考資料

1. 丘成桐 (1)偏微分方程的方法 (2)二十一世紀數學的挑戰 (3)我在幾何分析的個人經驗 (4)時空幾何與 GR 中的質量
2. 傳播季刊 41 卷 3 期 專訪 G.Huisken
3. 幾何與 GR 中的純量曲率 Richard Schoen
4. 大域微分幾何 第三冊附錄

   (1)王藹農

   (2)王慕道 $\frac{\partial H}{\partial s}=-(|A|^2+Ric(N,N))$

   (3)林俊吉 彈性曲線(elastic curve)的 $E=\int\frac{1}{2}\kappa^2 ds$，

   能量泛函 $E=\int(\frac{1}{2}\kappa^2+\lambda)ds\Rightarrow\frac{d^2\kappa}{ds^2}+\frac{1}{2}\kappa^3-\lambda\kappa=0$

§ 08 附錄

1. $u:\Omega\subset R^2\to R$，$\Sigma=\{(x,y,u(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega\}$ 為函數 u 的圖(graph)

Σ 的面積為 $A[u]=\iint_\Omega\sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dxdy$，$|\nabla u|^2=u_x^2+u_y^2$

$X(x,y)=(x,y,u(x,y))$

$X_x=(1,0,u_x), X_y=(0,1,u_y)$

$E=X_x\cdot X_x=1+u_x^2, \mathrm{F}=\mathrm{X}_x\cdot X_y=u_x u_y, G=X_y\cdot X_y=1+u_y^2$

$EG-F^2=(1+u_x^2)(1+u_y^2)-(u_x u_y)^2=1+u_x^2+u_y^2=1+\left|\nabla u\right|^2$

面積 $A[u]=\iint_\Omega dA=\iint_\Omega\sqrt{EG-F^2}dxdy=\iint_\Omega\sqrt{1+\left|\nabla u\right|^2}dxdy$

2. 緊支集(compact support)

例如 $f:R\to R$

$f(x)=\begin{cases}1-x^2, |x|<1\\ 0, |x|\geq 1\end{cases}$ 則[-1,1]稱為 f 的 compact support。

3. 常見的 CMC surface 有哪些

(1) 圓柱面(cylinder) $H=\dfrac{1}{2R}$

(2) 球面 $H=\dfrac{1}{R}$

(3) Catenoid Helicoid H=0

(4) Delaunay 曲面：波紋柱面(unduloid) 結節柱面(nodiod)

(5) Wente torus

(6) 肥皂膜與複合結構 double bubble，plateau problem

毛細現象中的液面

4. 第一面積變分式的另一種推導

First fundamental form $g_{ij}=r_i\cdot r_j$

Area element $dA=\sqrt{g}du^i du^j$

Second fundamental form $h_{ij}=-n\dfrac{\partial r_i}{\partial u^j}=n\cdot r_{ij}$ (這裡採用 $h_{ij}=-n\cdot r_{ij}$)

$H=\dfrac{1}{2}g^{ij}h_{ij}=\dfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$

$A=\int\sqrt{g}du^1du^2$ ，以下求 δA

(1) Metric tensor 的變分

$$\delta r_i=\delta(\frac{\partial r}{\partial u^i})=\frac{\partial(\delta r)}{\partial u^i}=\frac{\partial(\phi n)}{\partial u^i}=\phi_i n+\phi n_i$$

$$\delta g_{ij}=\delta(r_i\cdot r_j)=\delta r_i\cdot r_j+r_i\cdot\delta r_j=(\phi_i n+\phi n_i)\cdot r_j+r_i\cdot(\phi_j n+\phi n_j)$$

$=\phi(n_i \cdot r_j + r_i \cdot n_j)$ (因為法向量與切向量垂直，$n \cdot r_i = n \cdot r_j = 0$)

由 Weigarten equation，$n_i = -h_i^k r_k$，其中 $h_i^k = g^{kl} h_{il}$

$n_i \cdot r_j = -h_i^k r_k \cdot r_j = -h_i^k g_{kj} = -h_{ij}$，$r_i \cdot n_j = \ldots = -h_{ji} = -h_{ij}$

$\delta g_{ij} = -2\phi h_{ij}$

(2) 行列式的變分

$\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij}$

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\delta g = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{ij}\delta g_{ij} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{ij}(-2\phi h_{ij}) = -\phi\sqrt{g}\, g g^{ij} h_{ij} = -2\phi H\sqrt{g}$$

$(\because H = \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij})$

(3) 面積的變分

$$\delta A = \int \delta\sqrt{g}\, du^1 du^2 = \int (-2\phi H\sqrt{g})\, du^1 du^2 = -2\int H\phi\, dA$$

註：

(1) -2 是符號約定的問題。

(2) 若寫成 $u \to u + \delta u$ δu 是法向為一分量

則 $\delta A = \iint \frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{1+(u_x+\varepsilon\delta u_x)^2+(u_y+\varepsilon\delta u_y)^2}\,\Big|_{\varepsilon=0} dxdy$

展開 $= \iint \frac{u_x\delta u_x + u_y\delta u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} dxdy$，分部積分且邊界條件

…

$= -2\iint H \cdot \delta u \cdot \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\, dxdy$

(3) $H = \frac{(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy}}{2(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2}}$，$K = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^2}$

(4) 由 $\frac{\partial H}{\partial s} = -(|A|^2 + Ric(N,N))$ 推到 Laplace comparison theorem

(M,g)是 Riemannian manifold

曲面 Ω 嵌入在(M,g)中，其法向量為 N

若背景流形 M 的法方向 Ricci 曲率滿足下界 $Ric(N,N) \ge k$

則曲面上的均曲率 H 的 Laplace-Betrami 算子滿足 $\Delta H \leq -H^2 - k$
據稱這個不等式重要。
這是王慕道院士在附錄篇的摘要。[大域微分幾何] p.708