§ Hopf-Rinow 定理

一個微分流形 M 任意兩點 甚麼條件下 有一條連接這兩點的最小測地線？
在一個黎曼流形(M g)上 下列條件等價

1. $\exp_p : T_pM \to M$ 是被定義的
2. (M d)是完備的
3. M 是測地完備的(geodesically complete)

可以在整個切空間定義 Exponential map $\Leftrightarrow$ 此流形(M g)是完備的。
特別地 緊緻(compact)流形都是 geodesically complete

若 M 是一完備曲面 對於 M 上兩點 A、B，存在一個連接 A,B 的最小測地線。

定義

設 $\{a_n\}$ 是度量空間 M 的一個點序列。如果對任意給定的正數 ε 總是可以找到

正整數 $N(\varepsilon)$ ，使得只要 $n, l > N(\varepsilon)$ 就有 $\rho(a_n, a_l) < \varepsilon$ 則稱 $\{a_n\}$ 是一個柯西

(Cauchy)序列。

定義

若度量空間 M 上的每一個柯西序列都收斂，則稱 M 為完備的。
如果連通的黎曼流形 M 關於從黎曼度量誘導的距離成為完全的度量空間 則稱 M 是完備的黎曼流形。
歐氏空間是完備的的度量空間 因此可以看做是完備的黎曼流形，但是歐氏空間不是緊緻的(compact)。
因此 從幾何的觀點看 緊緻性並不是最適宜的條件。
對黎曼流形的整體研究，完備性被認為是最適宜的條件。

定理

M 是連通的黎曼流形 下列三個條件是等價的
(1) M 是完備的
(2) M 上任一條測地線可以無限延長
(3) 每個有界的無窮子集必有極限點

推論

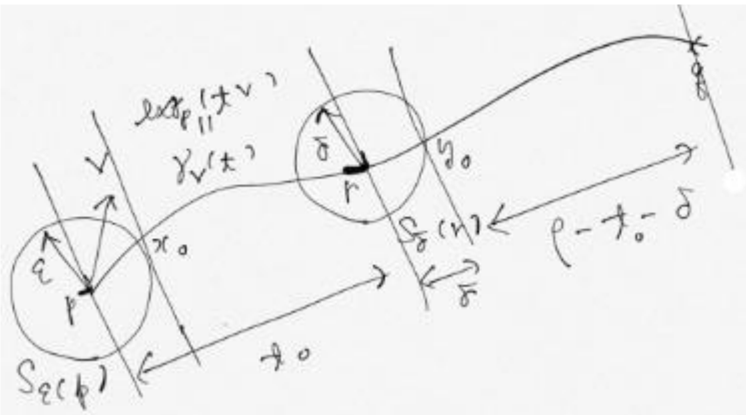
(1)在完備的黎曼流形上 任意兩點可以用最短測地連結。
(2)緊緻的連通黎曼流形氏完備的

定義

M 是連通的黎曼流形，若 M 不是另一個連通的黎曼流形的真開子流形，則稱 M 是不可延拓的。

定理

完備的黎曼流形是不可延拓的。反之 不成立完(完備性比不可延拓性強。)



以下證明

$\exp_p$ 在整個切平面 T_pM 上有定義則存在連接 p，q 的測地線 γ ，使得

$l(\gamma)=d(p,q)$ (即 γ 是連接 p，q 的最短測地線。)

假設 $d(p,q)=\rho>0$

$\varepsilon\in(0,\rho)$ 使得 $S_\varepsilon(p)$ 是一個 normal ball(M 的一個 compact submanifold)

定義 d(x,q), $x\in S_\varepsilon(p)$ 則存在一個 $x_0\in S_\varepsilon(p)$ ，d(x,q)有最小值

且 $x_0=\exp_p(\varepsilon v),|v|=1$

考慮 $\gamma_v(t)=\exp_p(tv)$ ， $r=\exp_p(t_0)$

取 δ ， $0<\delta<\rho-t_0$ ， $S_\delta(r)$ 是一個 normal ball

定義 $d(y,q), y\in S_\delta(r)$ 則存在一個 $y_0\in S_\delta(r)$ 使得 d(y,q)有最小值

$\rho-t_0=d(r,q)=\delta+d(y_0,q)$ ，所以 $d(y_0,q)=\rho-t_0-\delta$

$d(p,y_0)\geq d(p,q)-d(y_0,q)=\rho-(\rho-t_0-\delta)=t_0+\delta$

所以 $y_0=\gamma_v(t_0+\delta)$

$d(\gamma_v(t_0+\delta),q)=\rho-(t_0+\delta)$

$l(\gamma)=t_0+\delta+[\rho-(t_0+\delta)]=\rho=d(p,q)$ 得證。

要證明 $t_0\in[\varepsilon,d(p,q)]$ 是使得 $d(p,\gamma_v(t))+d(\gamma_v(t),q)=d(p,q)$ 成立的最後一個值

若 $t_0=d(p,q)$ 則 $d(p,\gamma_v(t_0))=t_0=d(p,q)$ ， $\gamma_v(t_0)=q$ ，即 γ 是連接 p,q 的最小測地線， $l(\gamma)=d(p,q)$

若 $t_0<d(p,q)$ 則

[DG06] p.147

Theorem 4.1.37 (Hopf-Rinow). *Let M be a Riemann manifold and $q \in M$. The following assertions are equivalent:*
(a) $\exp_q$ *is defined on all of* T_qM.
(b) The closed and bounded (with respect to the metric structure) sets of M are compact.
(c) M is complete as a metric space.
(d) M is geodesically complete.
(e) There exists a sequence of compact sets $K_n \subset M$, $K_n \subset K_{n+1}$ and $\bigcup_n K_n = M$ such that if $p_n \notin K_n$ then $d(q, p_n) \to \infty$.

Moreover, on a (geodesically) complete manifold any two points can be joined by a minimal geodesic. □

Remark 4.1.38. On a complete manifold there could exist points (sufficiently far apart) which can be joined by more than one minimal geodesic. Think for example of a manifold where there exist closed geodesic, e.g., the tori T^n. □