§ Isometry

在 Hyperbolic plane H=$\{(x,y)\in R^2 \,|\, y>0\}$ (H,g) $g=\frac{1}{y^2}(dx\otimes dx+dy\otimes dy)$

Putting (x,y)=x+iy 則 $z\rightarrow w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc=1$ 是一個 H 上的保長映射 (isometry)試證之

z=x+iy，dz=dx+idy 則 $ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)=\frac{-4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$

$w=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc=1$，則 $\frac{dw}{dz}=\frac{1}{(cz+d)^2}$ ，$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}=\frac{1}{(c\bar{z}+d)^2}$

$\bar{w}=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ，$w-\bar{w}=\ldots=\frac{z-\bar{z}}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}$

$$\frac{dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}=\frac{(cz+d)^2dw(c\bar{z}+d)d\bar{w}}{(w-\bar{w})^2(cz+d)^2(c\bar{z}+d)^2}=\frac{dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2}$$

所以 f 是一個 isometry