§ Divergence

在向量場的微積分中，散度、梯度、旋度 合併為 Stokes 定理。

在流形上座標變換並不容易。怎樣把 R^3 中的微積分搬到黎曼幾何，需一點手段。

1. R^3 中，通量對體積的變化率

(1) 向量場 E，$divE = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_S \mathrm{E} \cdot \bar{n} dS = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z}$

靜電場 E $divE = 4\pi\rho$ ，ρ 是電荷密度

散度定理 $\iint_S E \cdot ndS = \iiint_V divEdV$

(2) Differential form，Ω 是 R^3 中的有界區域

$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

則 $d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz$ 稱為 divergence。

(3) 在黎曼流形上向量場 W，$A_w : X \to \nabla_X W$ ，∇ 是 Levi-Civita connection

$$divW = trA_w = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} < A_w X, X > dS = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} X < W, X > dS$$

$= \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} <A(\ X)\ , X >\ d$，$\omega_{n-1}$ 是 n-1 維球體積。 p.280

2. 散度定理

(1) 即 $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

(2) 向量形式 $\iint_{\Omega} \mathrm{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div\mathrm{E}dV$

(3) 黎曼流形上的散度定理 $\int_{\partial\Omega} < W, v > dS = \int_{\Omega} (divW)dW$

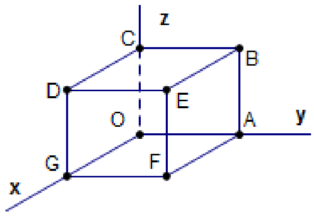
v 是 $\partial\Omega$ 上朝外的單位法向量。 [大域微分幾何]p.335

3. ρ 是電荷密度 $J = \rho V$ 是電流密度

連續方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$

擴散方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = k\nabla^2 \rho$

例1. 面積分



$$A=(2x-z,x^2y,-xz^2)$$

S1：DEFG， $\vec{n}=(1,0,0)$，x=1，

$$\iint_{S_1}\vec{n}\,AdS=\int_0^1\int_0^1(2-z)dydz=\frac{3}{2}$$

$S_2:ABCO$， $\iint_{S_2}\vec{n}\cdot AdS=\int_0^1\int_0^1 zdydz=\frac{1}{2}$

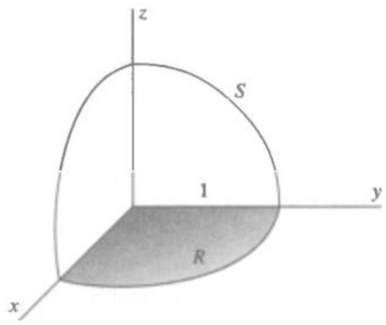
六個面積分加起來... $\iint_S\vec{n}\cdot AdS=\frac{11}{6}$

By Divergencetheorem， $\iint_S\vec{n}\cdot AdS=\iiint_V\nabla\cdot AdV$

$$\nabla\cdot A=\frac{\partial}{\partial x}(2x-z)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial z}(-xz^2)=2+x^2-2xz$$

$$\iiint_V\nabla\cdot AdV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(2+x^2-2xz)dxdydz=\frac{11}{6}$$

例2. 面積分



S：球心在原點，半徑=1 的 $\frac{1}{8}$ 球面

求 $\iint_S z^2dS=$

$$X(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$X_x=(1,0,-\frac{x}{z}),X_y=(0,1,-\frac{y}{z})$$

$$E=X_x\cdot X_x=\frac{x^2+z^2}{z^2},F=X_x\cdot X_y=\frac{xy}{z^2},G=X_y\cdot X_y=\frac{y^2+z^2}{z^2}$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}dxdy=\frac{1}{z}dxdy$$

$\iint_S z^2dS=\iint_R zdxdy$ ，let $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

Then $\iint_R zdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}drd\theta=\frac{\pi}{6}$

Let $\vec{F}=(0,0,z),\vec{n}=(x,y,z)$ ， $divF=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=1$

Then by divergence theorem $\iint_S z^2 dS=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iiint_V dV=\frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}$

§ Divergence of vector field X is given by $divX=tr(\nabla X)$

$A_W : X\to\nabla_X W$ ， S^{n-1}是單位球，$|X|=1$

驗證$tr(A)=\frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}<A(X),X>dS$ p.281

例3. W=(x+2y，4x+3y) 求 div W=

$X=(\cos\theta,\sin\theta)$ ， $W(X)=(\cos\theta+2\sin\theta,3\cos\theta+4\sin\theta)$

則$<W(X),X>=\cos^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$ ， $\omega_1=2\pi$

$$\frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}<W(X),X>dS=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{2\pi}(\frac{1+3}{2})\times 2\pi=4=divW$$

假設在 n=2 的情況下

$$\nabla_X Y=\sum_i (XY^i-\Gamma^i_{jk}X^jY^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

W=(x+2y,4x+3y),X=$(u,v)=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$

$$\nabla_X W=\sum_i XW^i\frac{\partial}{\partial x^i}=(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y})(x+2y)\frac{\partial}{\partial x}+(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y})(4x+3y)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$=(u+2v)\frac{\partial}{\partial x}+(4u+3v)\frac{\partial}{\partial y}$$

$X\xrightarrow{A_W}\nabla_X W$ ， $(u,v)\xrightarrow{A_W}(u+2v,4u+3v)$ ，所以$A_W=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$

$divW=tr(\nabla W)=tr(A_W)=4$

$$\nabla\cdot W=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)+\frac{\partial}{\partial y}(4x+3y)=1+3=4$$

即$divW\Big|_{(0,0)}=\frac{2}{2\pi}\iint_V\nabla\cdot WdV=\frac{1}{\pi}\times 4\times\iint_V dV=4$ ，其中 V 是單位圓。

即 $divW\Big|_{(0,0)} = tr(A) = 4$

註：

1. 須繞路的原因是一般而言 Manifold 上 $\Gamma_{ij}^k \neq 0$

在[大域微分幾何]p.281 最後一行說，這積分式表示散度有平均的概念

Laplacian $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，在 Manifold 上 Δ 在座標變換上不順暢，因此考慮

$\Delta := div(grad)$

在 Manifold M 上 grad f 是一個向量場，用黎曼度量作內積 $< gradf(x), v >= df(v)$

Div 的定義是由 $L_X(dV) = (divX)dV$ 定義 div X，

其中 L_X 是 Lie derivative， $dV = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ 是 volume element

當然，就上文 divergence 的另一種定義是 $divX = tr(\nabla X)$

在流形上 Laplacian f :=div(grad f)

§ Maxwell 方程

$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$

$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J$

[Spacetime and Geometry] p.101

§ Covariant divergence of V^μ

$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda$

可證得 $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$ ，$\therefore \nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu)$

§ divergence 與體積漲縮率　p.324

M 是一 Riemann manifold，U 是 M 的 open subset，W 是定義在 U 上的 C^∞ 向量場。

φ_t 是 W 的流線。即 $\varphi_t : U \to M$ ，$\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\Big|_{t=0} = W(p), \forall p \in U$

則 M 沿 φ_t 的體積漲縮率=divW。

設 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 M 中定義在 U 的正交標架。

$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ 是 coframe，即 $\omega^j(e_i) = \delta_i^j$

Volume form $dM = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ ， $dM_t \equiv \varphi_t^*(dM)$ ，則 $dM_t = (\det(a_i^j(t))dM$

定義 $(\varphi_t)_* e_k = a_k^j(t) e_j$ ，則 $divW = \dfrac{d}{dt}\det(a_i^j(\mathrm{t}))\Big|_{t=0}$

$$\frac{d}{dt}(dM_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\det(a_i^j(t))\Big|_{t=0} \bullet dM = divW \bullet dM$$