§ 向量場的共變微分

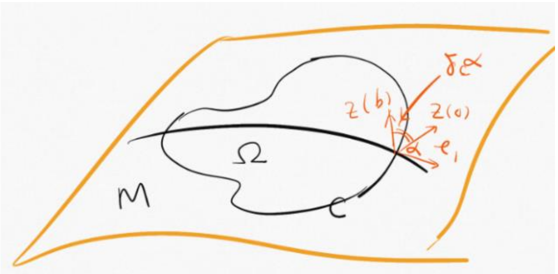
$$\frac{dW}{Dt}=(\frac{dW}{dt})^T$$

平行移動(parallel transport)

$\alpha: I \to M$

$W(t_0)=W_0, \frac{DW}{dt}=0$ for $\forall t \in I$ $\Leftrightarrow$ W 是沿 α 的平行向量場

(或者 $\frac{dW^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}W^k=0$)



在 M 上取測地坐標系(u,v)

取其正交標架

$e_1=X_u, e_2=X_v/g, e_3=X_u\times X_v/g$

設 $\gamma=\gamma(t)=(u(t),v(t))$ 是 M 上一條含於(u,v)座標鄰域中的曲線,任取一 $\gamma(t)$ 上的單位平行向量場 Z,

$Z=\cos\alpha e_1+\sin\alpha e_2$,$\alpha$ 是 e_1 逆時針旋轉到 Z 的角度

測地坐標系

其所有的 u-curve 是 M 上的么速測地線,且 u-curve,v-curve 互相垂直

因此 $ds^2=du^2+Gdv^2$

$C=\partial\Omega$,$X=X(t), 0\le t\le b, X(b)=X(0)$

定義 holonomy 角 $\delta_C\alpha=\int_0^b\frac{d\alpha}{dt}dt$ Z 沿 C 走一圈的總差角

§ 定理 $\int_\Omega KdM=\delta_C\alpha$

$Z=\cos\alpha e_1+\sin\alpha e_2$

$$\frac{dZ}{dt}=(-\sin\alpha e_1+\cos\alpha e_2)\frac{d\alpha}{dt}+(\cos\alpha\frac{de_1}{dt}+\sin\alpha\frac{de_2}{dt}) \quad ...(\#)$$

(切平面是 e_1,e_2 所張,Z 是平行向量場,所以 $\frac{dZ}{dt}$ 的切部分=0,所以 $\frac{dZ}{dt}\cdot e_2=0$)

(#)兩邊對 e_2 做內積

$$0=<\frac{dZ}{dt},e_2>=\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\cos\alpha<\frac{de_1}{dt},e_2>$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=-<\frac{de_1}{dt},e_2>=...=-g_u\frac{dv}{dt}$$

($|e_2|=1$,所以 $G=X_v\cdot X_v=g^2$)