Immersion & Embedding [N1005]

一個流形 M 如何映射到另一個維度通常更高的流形N 中。

§ 浸入(Immersion)

定義：一個光滑映射 $f:M\to N$ 稱為一個浸入，如果它在 M 上每一個點的微分 $df_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 都是一個單射(injectuve)。

§ 嵌入(Embedding)

定義：一個光滑映射 $f:M\to N$ 稱為一個嵌入，如果它同時滿足兩個條件

(1) f 是一個浸入

(2) f 是一個拓撲嵌入，即 $f:M\to f(M)$ 是一個同胚。

這裡 f(M)繼承了 N 的拓撲。

特性	浸入（Immersion）	嵌入（Embedding）
微分 df_p	**必須**處處是單射。	**必須**處處是單射（因此嵌入一定是浸入）。
映射 f 本身	**可以不是**一對一。允許自交。	**必須**是一對一。不允許自交。
拓撲性質	f **不一定**是 M 到 $f(M)$ 的同胚。$f(M)$ 的拓撲可能比 M 複雜（例如自交點附近）。	f **必須**是 M 到 $f(M)$ 的同胚。拓撲結構完全保持。
像集 $f(M)$	是 N 中的一個「浸入子流形」，可能有奇異點（如自交點）。	是 N 中的一個**光滑子流形**，本身也是一個流形。

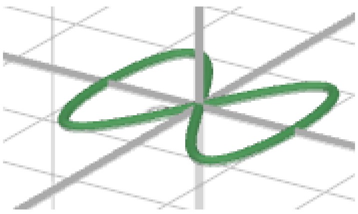
例

1. (a)is not an immersion (b)Is an immersion，but not an embedding


(a)


(b)

2. Klein bootle：在三維空間中的常見表示：它必然有自交線。這個模型是一個浸入，因為除了自交線上的點外，局部上它都是一個光滑曲面。



3. $\varphi:R\to R^2$ ，$\varphi(t)=(\cos t,\sin 2t)$ 是 immersion，不是 embedding。(lemniscate)

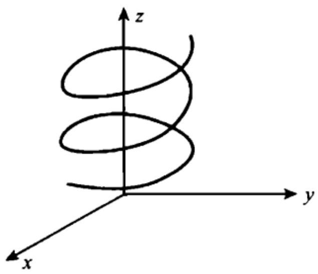
(1) $\varphi'(t)=(-\sin t,2\cos 2t)\neq(0,0)$ for $\forall t$ 所以 φ 是 immersin。

若 sint=0 則 $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1$

(2) 若 φ 是 embedding 則 $\varphi: R \to R^2$ 是同胚

但是 $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = (1,0)$　φ 不是單射，所以 φ 不是嵌入。

4. 證明 $\varphi: R \to R^3, \varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 是一個嵌入。



我們需證明 φ 是一個嵌入（embedding），即 φ 是一個光滑浸入（smooth immersion）且是到像上的同胚（homeomorphism onto its image）

1. 光滑性是顯然的，因為 cost，sint，t 都是光滑函數。
2. Immersion

φ'(t)=(-sint,cost,1) $\neq$ (0,0,0) $\forall$t　所以 φ 是 immersion。

3. 同胚到像

(1) 單射性 若 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ ，$(\cos t_1, \sin t_1, t_1) = (\cos t_2, \sin t_2, t_2)$ 則 $t_1 = t_2$ 所以 φ 是單射。

(2) 逆映射連續性

逆映射連續性（Continuity of the inverse）：定義投影 $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 為 $\pi(x,y,z) = z$，則 π 連續且滿足 $\pi \circ \varphi(t) = t$。因此，逆映射 $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 可表為 $\varphi^{-1} = \pi|_{\varphi(\mathbb{R})}$，即 π 在 $\varphi(\mathbb{R})$ 上的限制。由於連續映射的限制仍連續，故 φ^{-1} 連續。

所以 φ 是一個光滑嵌入。

Helix(圓柱螺線)：

在 xy 平面的投影是單位圓，沿 z 軸勻速上升，沒有自交且與直線同胚。

5. $T^2 = R^2 / (2\pi Z)^2$　二維環面 $(x,y) \in (0, 2\pi)$　配備 $g = dx^2 + dy^2$

$\varphi: T^2 \to R^4$　$\varphi(x,y) = (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y)$

證明 φ 是一個等距嵌入(isometric embedding)

(1) φ 是 smooth 映射

(2) Immersion ($d\varphi_p$ 是單射)

(3) φ 是單射

(4) Isometric

(5) Embedding

關於(4) T^2的 metric $g=dx^2+dy^2$ ： R^4的 metric $h=du_1^2+du_2^2+du_3^2+du_4^2$

要證明$\varphi^* h=g$ (pullback)

$du_1=-\sin xdx, du_2=\cos xdx, du_3=-\sin ydy, du_4=\cos ydy$

$\varphi^* h=\varphi^*(du_1^2+...+du_4^2)=(\varphi^* du_1)^2+...+(\varphi^* du_4)^2$

$\varphi^* du_1=d(\varphi^* u_1)=d(\cos x)=-\sin xdx$

$\varphi^* h=\cos^2 xdx^2+\sin^2 xdx^2+\cos^2 ydy^2+\sin^2 ydy^2=dx^2+dy^2=g$

$(x,y)\to\varphi(x,y)$是單射，且是從 compact manifold 到 Hausdorff 空間的連續映射，所以是一個嵌入。

§ 重要定理

1. Whitney Embedding Theorem
   任何 m 維光滑流形都可以嵌入到R^{2m}維的歐氏空間中。這是一個存在性定理，保證了足夠高的維度下，嵌入總是可能的。
2. Whitnet Immersion Theorem
   任何 m 維光滑流形都可以浸入到R^{2m-1}維的歐氏空間中。浸入所需的維度比嵌入更低。
3. 若$M\subset N$且 inclusion map 是一 embedding 稱 M 是 N 的 submanifold。

   $f:M\to N$ 若$(df)_p$是 surjective 則稱 $p\in M$ 為 regular point(否則稱為 critical point)
   若 $f^{-1}(q)$是 regular point 則稱$q\in N$為 regular value。

   Let $f:M\to N$ be a differential embedding，f(M) is called a differentiable submanifod of N。

4. Let $q\in N$ be a regular value of $f:M\to N$ and assume that the level set $L:=f^{-1}(q)=\{p\in M \mid f(p)=q\}$ is nonempty。Then L is a submanifold of M and

   $T_pL=\ker(df)_p\subset T_pM$ for all $p\in L$ 。

證明 S^n 是 R^{n+1} 的 n-dim submanifold 且 $T_xS^n = \{v \in R^{n+1} \,|\, < x, v >= 0\}$

§ 習作

1. Let M，N be two smooth manifolds and $f: M \to N$ be an immersion。Suppose that $\dim(M) = \dim(N)$，prove that f is a local diffeomorphism。

   Since f is an immersion，its differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ is injective for every

   $p \in M$。Given $\dim(M) = \dim(N)$，the tangent spaces T_pM and $T_{f(p)}N$ have

   equal dimensions。A linear injective map between vector spaces of same dimension is

   necessarily surjective，hence df_p is an isomorphism。

   By the inverse function theorem for manifolds，if df_p is an isomorphism at p，

   there exist neighborhoods $U \subset M$ of p and $V \subset N$ of f(p) such that $f|_U : U \to V$

   is a diffeomorphism。
   Since this hold for every $p \in M$，f is a locla diffeomorphism。

2. $f: R \to R^2$，$f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ 是 embedding。

3. 考慮一個從實數線 R 到環面 T^2 的映射 $f(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t})$，其中 α 是無理數。
   證明 f 是一個單射浸入，但不是嵌入。

4. 管狀鄰域定理(Tubular Neighborhood Theorem）通常適用於哪種映射？

§ 等距浸入與高斯方程式

設 $f: M^n \to \overline{M}^{n+k}$ 是一個黎曼流形的等距浸入(isometric immersion)。R 與 $\overline{R}$ 分別是 M 與 $\overline{M}$ 的黎曼曲率張量，h 是第二基本形式(second fundamental form)。

1. 若 $\overline{M}$ 是歐幾里得空間 R^{n+k} (即 $\overline{R}=0$)，且 M 是全測地線的(totally geodesic)，證明 M 的截面曲率(sectional curvature)處處為 0
2. 考慮單位球面 $S^n(1)$ 嵌入 R^{n+1} 中。利用高斯方程式證明 $S^n(1)$ 的截面曲率恆等於 1

§ 離曼流形上的高斯方程

古典曲面論中高斯方程：

在三維歐氏空間 R^3 中，設S是一個光滑曲面，具有由嵌入誘導的度量（第一基本形式）g。高斯方程式的核心表現為：$K=\dfrac{R_{1212}}{\det(g)}$

高維黎曼流形中的高斯方程(子流形情形)：

在黎曼幾何中，高斯方程式是描述一個子流形（特別是超曲面或更一般的高餘維子流形）的曲率與外圍空間曲率之間關係的一個基本公式。

設(M,g)，$(\tilde{M},\tilde{g})$ 是黎曼流形，且 M 是 $\tilde{M}$ 的子流形(通常假設誘導度量 g 是 $\tilde{g}$ 的拉回)。給定向量場 X、Y、Z、W 切於 M，我們有第二基本形式

$$B(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y$$

高斯方程式：

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\left\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\right\rangle+\langle B(X,Z),B(Y,W)\rangle-\langle B(Y,Z),B(X,W)\rangle$$

這個公式說明，子流形的內在曲率等於外圍空間曲率在切向的分量加上由第二基本形式貢獻的一項。換句話說，子流形的彎曲有兩個來源：外圍空間本身的曲率，以及子流形在外圍空間中「彎折」所帶來的曲率。

與等距浸入的關係：

高斯方程式是等距浸入的相容性條件之一（另外還有 Codazzi–Mainardi 方程與 Ricci 方程）。

例 二維曲面在三維歐氏空間中的等距浸入

設 $\tilde{M} = R^3$ ，具標準歐氏度量 $\tilde{g}$ ， $\tilde{R} = 0$

M 是一個曲面，具有度量 g，等距浸入到 R^3(例如球面、環面等)。此時高斯方程簡化為 $\langle R(X,Y)Z,W \rangle = \langle B(X,Z), B(Y,W) \rangle - \langle B(Y,Z), B(X,W) \rangle$

取 X、Y、Z、W 為切向的單位正交基，可以導出：高斯曲率 K=det(S)

其中 S 是形狀算子(第二基本形式對應的 Weingarten 映射)，若取 e_1, e_2 為 M 的主方向曲率 κ_1, κ_2 則 $K = \kappa_1 \kappa_2$ 。