§ Consider the orthogonal group： $O(n)=\{A\in GL(n;R):AA^t=I\}$
Show that O(n) is a dfferentiable manifold，and determine its dimension。
2019 台大博士班
Orthogonal group 正交群：O(n) has two connected components。
The one that contains the identity element is a normal subgroup，called the special orthogonal group，and denotes SO(n)。It also called the rotation group。

在 Liegroup003 中有一個定理：

$M\xrightarrow{f}N, T_AM\xrightarrow{df}T_{f(A)}N$

1. $p\in M$ ，若 $(df)_p$ 是蓋射(surjective) 則稱 p 是 f 的正則點(regular point)

2. $\ker(df)_p=\{B\in T_AM\,|\,(df)_AB=0\}$

3. $q\in N$ ，若 $\forall p\in f^{-1}(g)$ 皆為正則點 則稱 q 為 f 的正則值

定理

$M\xrightarrow{f}N$ ， $q\in N$ 是 f 的正則值 使得 $L=f^{-1}(q)=\{p\in M\,|\,f(p)=q\}\neq\varnothing$

則 L 是 M 的子流形，且 $T_pL=kef(df)_p\subset T_pM$ for all $p\in L$

取 f 使得 $GL(n)\xrightarrow{f}S$ (S 是對稱矩陣)， $f(A)=A^tA$

$(df)_AB=\lim_{h\to 0}\frac{f(A+hB)-f(A)}{h}=...=A^tB+B^tA$

對任意對稱矩陣 S 取 $B=\frac{1}{2}AS$

則 $A^tB+B^tA=A^t(\frac{1}{2}AS)+(\frac{1}{2}AS)^tA=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}(S^tA^t)A=S$

所以 $(df)_A$ 是蓋射，由定理 取 A=I 則 $f^{-1}(I)=O(n)$ 是 GL(n)的子流形

因為 GL(n)是一個可微分流形，自然 O(n)是一個可微分流形。
問題是前述之定理怎麼證明。

$\dim(O(n))=\frac{n(n-1)}{2}$