The Implicit function theorem

假設有一個方程：F(x,y)=0，其中 F 是一個連續可微的函數，並且在某個點(a,b)上滿足：

1. F(a,b)=0（即該點滿足這個方程）
2. 偏導數 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

那麼，根據隱函數定理，在點(a,b) 的某個鄰域內，可以找到一個函數 y=g(x)，使得這個函數滿足 F(x,g(x))=0。換句話說，雖然 y 不能直接由 x 解出來（可能無法用顯式公式表示），但在小範圍內，仍然可以將 y 視為 x 的函數。

例 F(x,y)=$x^2+y^2-1=0 \to y=f(x)$

$\frac{\partial F}{\partial y}=2y$

F(0,1)=0，$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)\neq 0$ 所以在(0,1)附近存在 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$

在(1,0)附近 不行。

例 $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$ 在 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

$F(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=0, \frac{\partial F}{\partial y}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\neq 0$

(1) 用隱函數微分計算 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$ 在 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 的值=-1

(2) $\dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1$

順便問 原方程可以參數化嗎？

答案是令 y=tx 即可。得 $x=\frac{3t}{1+t^3}, y=\frac{3t^2}{1+t^3}, t\neq -1$

在黎曼幾何中

IFT on Manifolds： If $\phi: M \to R^n$ surjective differential at p，then

$\Sigma=\phi^{-1}(0)=\{p\in M \,|\, \phi(p)=0\}$ is a smooth submanifold near p。

Example：

Let M= R^3 with Euclidean metric，and define： $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ 。

The level set $\Sigma=\phi^{-1}(0)$ is the unit sphere S^2 。

1. The differential $D\phi$ at point (x,y,z) is $D\phi_p=(2x,2y,2z)$ is surjective iff

   $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 。Since Σ excludes the origin，ϕ has rank 1 and thus S^2 is a smooth embedded submanifold。
2. Local parameterization via IFT：

   Near p=(0,0,1)，we can solve z as function of (x,y)： $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

   The IFT guarantees this valid in a neighborhood of (0,0,1)，since $\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{(0,0,1)}=2\neq 0$

§ Consider the orthogonal group： $O(n)=\{A\in GL(n;R):AA^t=I\}$

Show that O(n) is a dfferentiable manifold，and determine its dimension。
2019 台大博士班
Orthogonal group 正交群：O(n) has two connected components。
The one that contains the identity element is a normal subgroup，called the special orthogonal group，and denotes SO(n)。It also called the rotation group。

在 Liegroup003 中有一個定理：

$M\xrightarrow{f}N, T_AM\xrightarrow{df}T_{f(A)}N$

1. $p\in M$ ，若$(df)_p$是蓋射(surjective) 則稱 p 是 f 的正則點(regular point)

2. $\ker(df)_p=\{B\in T_AM\,|\,(df)_AB=0\}$

3. $q\in N$ ，若$\forall p\in f^{-1}(g)$皆為正則點 則稱 q 為 f 的正則值

定理

$M\xrightarrow{f}N$ ， $q\in N$是 f 的正則值 使得$L=f^{-1}(q)=\{p\in M\,|\,f(p)=q\}\neq\varnothing$

則 L 是 M 的子流形，且$T_pL=kef(df)_p\subset T_pM$ for all $p\in L$

取 f 使得$GL(n)\xrightarrow{f}S$ (S 是對稱矩陣)，$f(A)=A^tA$

$$(df)_A B=\lim_{h\to 0}\frac{f(A+hB)-f(A)}{h}=\ldots=A^tB+B^tA$$

對任意對稱矩陣 S 取$B=\frac{1}{2}AS$

則$A^tB+B^tA=A^t(\frac{1}{2}AS)+(\frac{1}{2}AS)^tA=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}(S^tA^t)A=S$

所以$(df)_A$是蓋射，由定理 取 A=I 則$f^{-1}(I)=O(n)$是 GL(n)的子流形

因為 GL(n)是一個可微分流形，自然 O(n)是一個可微分流形。

$$\dim(O(n))=\frac{n(n-1)}{2}$$

§ Let X=$\left\{(x,y,z)\in R^3 \middle| x^3+xyz+y^2=1\right\}$

(a) Show that X is a 2-manifold。

(b) Consider the map $\pi:X\to R^2$ taking (x,y,z) to (x,y)。
Find all points of X at which π fails to be a local diffeomorphism。

Consider the function $f:R^3\to R$ ，$f(x,y,z)=x^3+xyz+y^2-1$

$$df=(3x^2+yz,xz+2y,xy)$$

取 p=0，原像為$f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\big|x^3+xyz+y^2-1=0\}$

$\begin{cases}3x^2+yz=0\\ xz+2y=0\\ xy=0\\ x^3+xyz+y^2=1\end{cases}$ 無解，在$f^{-1}(0)$上沒有梯度為零的點，即 df 處處不為零(表示

沒有奇點)，所以 p 是正則值，$f^{-1}(0)$是二維光滑子流形。

取 p=-1

原像為 $f^{-1}(-1) = \{(x, y, z) \mid x^3 + xyz + y^2 = 0\}$。
檢查梯度為零的點是否在集合中：梯度為零的點滿足 $xy = 0$，且若 $x = 0$ 則 $y = 0$，若 $y = 0$ 則 $x = 0$，所以所有形如 $(0, 0, z)$ 的點都滿足梯度為零。代入原像方程：

$$0^3 + 0 \cdot 0 \cdot z + 0^2 = 0,$$

因此所有 $(0, 0, z)$ 都在 $f^{-1}(-1)$ 中。這意味著在這些點上 df 的秩為 0，不是滿射，故 $p = -1$ 不是正則值。此時，原像 $f^{-1}(-1)$ 在這些點附近可能不是光滑子流形。例如，在點 $(0, 0, 0)$ 處，曲面有奇點（可局部分析方程 $y^2 + xyz + x^3 = 0$）。

例　$f : M_{2\times 2}(R) \to R^2,\ f(A) = (\det A, trA)$，A 是一個二階實矩陣。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ f(A) = (ad - bc, a + d)$$

$$df(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial a} & \dfrac{\partial f_1}{\partial b} & \dfrac{\partial f_1}{\partial c} & \dfrac{\partial f_1}{\partial d} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a} & \dfrac{\partial f_2}{\partial b} & \dfrac{\partial f_2}{\partial c} & \dfrac{\partial f_2}{\partial d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c & -b & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Jacobian matrix)}$$

取 p=(0,0)， $f^{-1}(p) = \{A \mid \det A = 0, trA = 0\}$　$a + d = 0, ad - bc = 0 \Rightarrow a^2 + bc = 0$

此時 $f^{-1}(p)$ 中含有 A=0 使得 $df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rank=1<2

所以 p(0,0)不是 regular value，原像(preimage)有奇點，不是 smooth manifold。

取 p(1,0)　$f^{-1}(1,0) = \{A \mid \det A = 1, trA = 0\}$

$$df(A) = \begin{pmatrix} -a & -c & -b & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (證明兩列線性無關　省略)

在 $f^{-1}(1,0)$ 的每一點上，df(A)的秩皆為 2，即 p(1,0)是 regular value，所以

$f^{-1}(1,0)$ 是 M 的 smooth submanifold，dim=2

A= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, x^2 + yz = -1$ 是 R^3 中的雙曲面。