

1. 核心關係：Killing 場定義靜態觀測者與能量守恆

- 類時 Killing 場 (Timelike Killing vector field)

若時空存在一個類時 Killing 向量場 K^μ (滿足 $L_K g_{\mu\nu} = 0$ 且 $K^\mu K_\mu < 0$)，則時空具有 **時間平移對稱性** (time-translation symmetry)。

物理意義：時空是 **靜態** (static) 的 (如史瓦西時空)，即存在全局定義的「時間方向」。

- 靜態觀測者 (Static observers)

此類觀測者的世界線與 K^μ 平行，其四維速度 u^μ 可表示為：

$$u^\mu = \frac{K^\mu}{\sqrt{-K^\nu K_\nu}}.$$

他們的固有時間 (proper time) 由 K^μ 的模長決定。

- 光子能量的測量

一個光子 (四維動量 p^μ) 被靜態觀測者測得的能量為：

$$E = -p_\mu u^\mu = \frac{-p_\mu K^\mu}{\sqrt{-K^\nu K_\nu}}.$$

關鍵點：由於 K^μ 是 Killing 場，量 $-p_\mu K^\mu$ 沿光子的測地線 **守恆** (證明見下文)。

2. 紅移公式的推導

設發射源 (位置 1) 和接收器 (位置 2) 均為靜態觀測者：

- 發射端的能量： $E_1 = \frac{-p_\mu K^\mu|_1}{\sqrt{-K^\nu K_\nu|_1}}$
- 接收端的能量： $E_2 = \frac{-p_\mu K^\mu|_2}{\sqrt{-K^\nu K_\nu|_2}}$

因 $-p_\mu K^\mu$ 沿測地線守恆 ($-p_\mu K^\mu|_1 = -p_\mu K^\mu|_2$)，兩者能量比為：

$$\frac{E_2}{E_1} = \sqrt{\frac{-K^\mu K_\mu|_1}{-K^\nu K_\nu|_2}}.$$

光子頻率 $\omega \propto E$ (量子效應 $E = \hbar\omega$)，故 **紅移因子** z 定義為：

$$1 + z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{E_1}{E_2} = \sqrt{\frac{-K^\nu K_\nu|_2}{-K^\mu K_\mu|_1}}.$$

- 結果解讀：

- 若 $\sqrt{-K^\mu K_\mu}|_2 > \sqrt{-K^\mu K_\mu}|_1$ (接收器處 $|K|$ 更大) , 則 $z > 0$ (紅移) 。
- 此即 引力紅移：時空中不同位置的 K^μ 模長差異導致頻率變化。

3. 守恆量 $-p_\mu K^\mu$ 的證明

沿光子的測地線 (仿射參數 λ) , 需證：

$$\frac{d}{d\lambda}(p_\mu K^\mu) = 0.$$

- 步驟：

由測地線方程 $\frac{Dp^\mu}{d\lambda} = 0$ 和 Killing 方程 $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ ：

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(p_\mu K^\mu) &= p^\nu \nabla_\nu (p_\mu K^\mu) \\ &= p^\nu p_\mu \nabla_\nu K^\mu + K^\mu p^\nu \nabla_\nu p_\mu \\ &= \frac{1}{2} p^\nu p_\mu (\nabla_\nu K^\mu + \nabla_\mu K^\nu) + K^\mu \cdot 0 \quad (\text{因 } p^\nu \nabla_\nu p_\mu = 0) \\ &= 0 \quad (\text{由 Killing 方程 } \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0). \end{aligned}$$

因此 $-p_\mu K^\mu$ 是沿測地線的守恆量。

4. 史瓦西時空中的具體例子

- 史瓦西度量：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \dots, \text{類時 Killing 場 } K = \partial_t \text{ (即 } K^\mu = (1, 0, 0, 0) \text{)}。$$

其模長： $-K^\mu K_\mu = -g_{tt} = 1 - \frac{2GM}{r}$ 。

- 紅移公式：

設發射源在 r_1 , 接收器在 r_2 ：

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 - 2GM/r_2}{1 - 2GM/r_1}}.$$

- 若 $r_2 > r_1$ (接收器在更高引力勢) , 則 $z > 0$ (紅移) 。
- 當 $r_1 \rightarrow 2GM$ (黑洞視界) , $z \rightarrow \infty$ (無限紅移) 。

5. 物理與幾何意義總結

- Killing 場的作用：
 - 提供 時間對稱性，定義靜態觀測者和全局時間坐標。
 - 生成守恆量 $-p_\mu K^\mu$ （相當於光子的「坐標能量」），橋接發射端與接收端的測量。
- 紅移的本質：

引力紅移是 時空幾何的內稟效應，由類時 Killing 場的模長 $(-K^\mu K_\mu)^{1/2}$ 的空間變化決定。這反映了引力勢的差異（在史瓦西時空中即 r 的函數）。
- 非靜態時空：

若時空無類時 Killing 場（如動態宇宙學時空），則需用其他方法（如共形 Killing 場或數值模擬）計算紅移，但核心思想仍是 幾何效應主導頻率變化。



結論

在廣義相對論中，引力紅移的起源是類時 Killing 向量場的模長隨空間位置的變化。Killing 場的守恆量 $-p_\mu K^\mu$ 將發射源與接收器的測量聯繫起來，揭示了時空對稱性與量子（光子能量）觀測的深刻聯繫。這不僅是靜態時空的基石，也是理解黑洞、宇宙學紅移的關鍵工具。