

Killing vector fields

§ 06

假設在 R^4 時空中，取 Minkowski metric $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
時間平移向量場 $X = \partial_t$ 是一個 Killing field

Minkowski 度量的分量為常數矩陣， $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

由於 g 不依賴時間(即 $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$)，所以 $L_X g = 0$

$X = \partial_t$ 生成時間平移變換： $(t, x, y, z) \rightarrow (t + \varepsilon, x, y, z)$ 此變換保持時空結構不變
(兩事件間的時空間隔 Δs^2 恆定)，對應於時間平移對稱性。

在 Minkowski 時空中，Christoffel 符號 $\Gamma_{\mu\alpha}^\mu = 0$ (平坦時空)，

且 $\partial_\mu X^\mu = \partial_t(1) = 0$ 因此： $\text{div}(X) = 0$ 。

Minkowski 時空有 10 個獨立的 Killing vector fields(對應 Poincare 群)：

1. 空間平移： $\partial_x, \partial_y, \partial_z$
2. 空間旋轉： $-y\partial_x + x\partial_y$
3. Lorentz boost： $x\partial_t + t\partial_x$ (沿 x 軸的相對運動。)

文末有 Lorentz boost 是 Killing field 的證明。

在廣義相對論中，Killing 向量場代表了一個時空的對稱性，對應於某種坐標變換，使得度量張量保持不變。

Killing 向量場與守恆量直接相關，這來自於 Noether 定理。如果時空有一個

Killing 向量場 X^μ ，則粒子的共變動量： $p^\mu X_\mu$

在自由落體運動（測地線運動）下是守恆的，其中 $p^\mu = mu^\mu$ 是粒子的四動量。

1. 時間平移對稱(∂_t 為 Killing 向量場) → 守恆的能量
 2. 空間平移對稱($\partial_x, \partial_y, \partial_z$ 為 Killing 向量場) → 守恆的線動量
 3. 旋轉對稱(Killing 向量場對應於旋轉變換) → 守恆的角動量
- 這些對稱性使得廣義相對論中的測地線方程變得更容易求解。

在研究黑洞時，Killing 向量場特別重要：

1. 靜態黑洞（如 Schwarzschild 黑洞）具有時間平移 Killing 向量場，代表黑洞的靜態性質。
2. Kerr 黑洞（旋轉黑洞）具有額外的旋轉 Killing 向量場，對應角動量守恆。

3. Killing 視界 (Killing Horizon) 是事件視界的一種推廣，描述黑洞的熱力學性質，如溫度與熵的關係。

除了 Killing 向量場之外，某些時空（如 Kerr 度規）還擁有 Killing 張量對應額外的守恆量。例如，Kerr 黑洞中存在 Carter 常數，這對研究測地線運動至關重要。

[Hidden Symmetries](#) of Dynamics in Classical and Quantum Physics by [Marco Cariglia](#)

參考資料

1. [theory of cosmic inflation](#) [Alan Guth](#)1947-
2. [Notes on Killing fields](#) [Ivo Terek](#)[Exercises](#)
3. The principle tool for investigating the isometries of a metric is the Killing vector field. No matter the coordinate system in which the metric is cast, its set of Killing vectors (modulo coordinate transformations) will be the same.

[[Redshift](#) and [Killing vectors](#)]

4. Why are [Killing fields](#) relevant in physics?
5. Noether Symmetry vs [Killing vectors](#) and Isometries of Spacetime

Exercise

證明時空中的一個 Lorentz boost 是 Killing field

$X = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}$ 是沿 x-方向的 Lorentz boost

向量場的逆變分量為 $X^\mu = (X^t, X^x, X^y, X^z) = (x, t, 0, 0)$

Minkowski 度量 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ，協變分量為

$$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu \Rightarrow (X_t, X_x, X_y, X_z) = (-x, t, 0, 0) \quad (X_t = \eta_{tt} X^t = (-1) \cdot x = -x)$$

在 Minkowski 時空中， $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ 所以 $\nabla_\mu X_\nu = \partial_\mu X_\nu$

計算偏微導矩陣：

$$\partial_\mu X_\nu = \begin{pmatrix} \partial_t X_t & \partial_t X_x & \partial_t X_y & \partial_t X_z \\ \partial_x X_t & \partial_x X_x & \partial_x X_y & \partial_x X_z \\ \partial_y X_t & \partial_y X_x & \partial_y X_y & \partial_y X_z \\ \partial_z X_t & \partial_z X_x & \partial_z X_y & \partial_z X_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t(-x) & \partial_t(t) & \partial_t(0) & \partial_t(0) \\ \partial_x(-x) & \partial_x(t) & \partial_x(0) & \partial_x(0) \\ \partial_y(-x) & \partial_y(t) & \partial_y(0) & \partial_y(0) \\ \partial_z(-x) & \partial_z(t) & \partial_z(0) & \partial_z(0) \end{pmatrix}.$$

$$\text{得 } \partial_\mu X_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

須證明對稱部分為零： $\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu = 0$

所有分量都滿足，故 $L_x g = 0$

幾何意義：

Lorentz boost 生成時空的偽轉動對稱性（沿x-方向的相對勻速運動）。其積分曲線為： $(t, x, y, z) \rightarrow (t \cosh \phi + x \sinh \phi, x \cosh \phi + t \sinh \phi, y, z)$

其中 ϕ 為快度(rapidity)，此變換保持時空間隔 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 不變。