Killing vector fields

若向量場 X 滿足Lie 導數 $L_X g = 0$ ，這表示X 保持度量張量g 不變(preserve the metric)。

換句話說，沿X的流（flow），流形上的度量結構（如任意兩點間的距離、角度）保持不變。這等價於X 生成等距變換（isometries），即X 對應於流形的一種連續對稱性（例如，在球面上，繞軸旋轉的向量場就是 Killing 向量場）。

數學表述： $L_X g = 0$ 等價於 $\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$

$div(\mathrm{X}) = \nabla_i \mathrm{X}^i = g_{ij}\nabla_i X_j$ (協變導數的跡)。若 div(X)=0 則稱 X 是 divergence-free，表示沿 X 的流，流形的 volume form 保持不變。幾何上就是體積沒有壓縮或擴張。

$L_X g = 0$ 隱含 div(X)=0 (文末有證明。)

X 定義了一個「剛性運動」: 流形在 X 方向上的變換，如同剛體移動，既無形變（度量保持）也無體積變化（無散）。

在物理情境中，這對應於守恆律：例如，在廣義相對論中，時空的 Killing 向量場與能量（時間平移對稱）、角動量（旋轉對稱）等守恆量相關；在流體力學中，無散條件表示質量守恆。

§ 01 Definition and Killing equation

1. $L_X g = 0$

用局部座標表示 $L_X g_{\mu\nu} = \nabla_\mu X^\nu + \nabla_\nu X^\mu = 0$

用 Levi-Civita connection $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$ for all vectors Y，Z。

The Lie derivative of the metric along a vector field X with componens X^k is given by：

$(L_X g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{ik}\partial_j X^k + g_{jk}\partial_i X^k$

2. div(K)=0

In R^3 with metric $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$X^\mu = (1,0,0), \mathrm{Y}^\mu = (0,1,0), \mathrm{Z}^\mu = (0,0,1)$ are Killing vectors。

They represent the three translations。

Take the metric $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ (球面座標)

Now the metric is independent of ϕ ，so $R = \partial\phi$ is a Killing vector。

Transforming back to Cartesian coordinates，this becomes $R=-y\partial_x+x\partial_y$。

The Cartesian components R^μ are therefor (-y,x,0)，this represents a rotation about the z-axis。

同理$S^\mu=(z,0,-x),T^\mu=(0,-z,y)$表示對 y 軸，x 軸的旋轉。

Some propositions

Proposition 1

Let X，Y be two Killing fields，then [X，Y] is also a Killing field。

Thus the space of Killing fields is a Lie algebra，denoted by $iso(\mathrm{M},g)$。

In particular，we see that the dimension of iso(M,g) is at most $\frac{n(n+1)}{2}$。

Proposition 2

Let K be a Killing field of constant length，then the integral curves of K are geodesics。

i.e. $\nabla_K K=0$

Exercise

Killing vector field 滿足$\nabla_i X_j+\nabla_j X_i=0$

$g^{ij}(\nabla_i X_j+\nabla_j X_i)=0$，因為$g^{ij}$是對稱的，且$g^{ij}(\nabla_i X_j)=div(X)$

所以$2div(X)=0\Rightarrow div(X)=0$