

## Jacobi fields on CMC

[大域微分幾何 Ch30 ]CMC 上的 Jacobi 場與 Morse Index 定理

Jacobi 運算子：在 CMC 曲面  $\Sigma$  上，Jacobi 運算子的定義為  $L = \Delta + |A|^2 + Ric(N)$ ，

其中

- (1)  $\Delta$  是 Laplace-Beltrami 算子
  - (2)  $|A|^2$  是二階基本形式的平方範數
  - (3)  $Ric(N)$  是環境流形的 Ricci 曲率沿法向量  $N$  的分量。
- Jacobi field 是滿足  $Lu=0$  的函數  $u$ 。

幾何與分析性質

1. 與穩定性相關
  - 若  $L$  在整個曲面上為非負（即  $\Sigma$  是穩定的 CMC 曲面），則其對應的 Jacobi field 給出曲面的小變形，且曲面局部上不會收縮至較小的體積。
  - 不穩定的 CMC 曲面則存在負的特徵值，使得小變形可能導致體積減少，進而不保持 CMC 屬性。
2. 與模空間（Moduli space）相關
  - 在特定條件下，Jacobi field 可以描述 CMC 曲面的模空間，即同胚變形後仍維持 CMC 性質的變化範圍。例如，在三維流形中的 CMC 曲面，其 Jacobi field 的零模（kernel）與模空間的維度有關。
3. 與特徵值問題相關
  - Jacobi 運算子的特徵函數和特徵值決定了 CMC 曲面的譜幾何性質。特別地，第一特徵值的正負性決定曲面的穩定性。
4. 與最小曲面理論的關聯
  - 在 CMC 曲面極限退化時，Jacobi field 可能與極限曲面的最小曲面 Jacobi field 相聯繫，這在研究曲面族的變分問題時尤其重要。

重要應用

1. 變分問題與穩定性分析
  - 透過 Jacobi field，可研究 CMC 曲面在不同幾何背景（例如雙曲空間、球面等）下的穩定性，進而推廣到極小曲面理論以及泡沫結構（Bubbletons）的研究。
2. CMC 曲面的分類與剛性

- 研究 CMC 曲面的 Jacobi 運算子允許我們對這些曲面進行分類，例如球面中的圓球是唯一的閉合穩定 CMC 曲面。
- 3. 在一般流形中的應用
  - 在高維流形中，Jacobi field 亦可用來研究 CMC 超曲面的模空間、拓撲性質以及是否存在唯一性與剛性結果。
- 4. 與物理相關的應用（如膜理論與一般相對論）
  - 在膜理論與廣義相對論中，CMC 曲面常出現在時間切片（時空的恆定均值曲率超曲面），Jacobi field 可以描述小擾動對這些曲面的影響，這在數值相對論與膜穩定性分析中很有用。

1. CMC(常均曲率)曲面上 Jacobi 場的分佈
2. Morse Index 定理
3. Geodesics 的穩定
4. Jacobi 場的 multiplicity 分佈 共軛邊界
5. Sobolev Theory
6. 值譜分解