

§ Jacobi 場與潮汐力(Tidal forces)

潮汐力描述的是由於引力場在空間中的變化（即引力場的梯度）所產生的相對加速度。例如，在地球和月球系統中，月球引力在地球近月面和遠月面產生不同的加速度，導致潮汐現象。在廣義相對論中，潮汐力體現為時空彎曲對自由落體粒子間相對運動的影響。

在廣義相對論中，兩物體開始時沿兩平行軌道(trajjectory)運動，潮汐力(tidal force)的存在（時空曲率的存在）會造成軌道接近或遠離，在此兩物體間產生相對加速度。

因此，所謂的測地線偏離效應，它是引力相互作用的一種體現。

數學上，廣義相對論中的潮汐力用黎曼曲率來描述，而一物體在重力影響下的軌道稱為測地線。

在廣義相對論中，潮汐力可用測地線偏移方程來描述：

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + R^\mu_{\nu\rho\sigma} u^\nu \xi^\rho u^\sigma = 0$$

- ξ^μ 是兩條鄰近測地線之間的偏移向量場。
- u^ν 是沿測地線的四速度。
- $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ 是Riemann曲率張量。

這個方程揭示了曲率張量如何導致兩條鄰近自由落體路徑之間的相對加速度，也就是廣義相對論中的潮汐效應。

Jacobi場是微分幾何中描述測地線族中偏移的向量場。更具體地說，它是測地線偏移方程的解，描述在彎曲流形上鄰近測地線如何相互分離或收斂。

Jacobi場反映了測地線如何對流形的彎曲作出反應：

- 如果Jacobi場擴張，說明測地線彼此遠離，對應於「負曲率」。
- 如果Jacobi場收縮，則測地線趨於聚集，對應於「正曲率」。
- Jacobi場在某點消失（即焦點或共軛點的存在），表明測地線在該點會相交，這對於理解測地凸性（geodesic convexity）和測地可觀測性至關重要。

潮汐力和Jacobi場之間的核心聯繫體現在測地線偏移方程中。具體來說：

- 物理意義：潮汐力描述了自由落體觀察者在引力場中的鄰近粒子之間產生的相對加速度。
- 幾何意義：Jacobi場則提供了一種純幾何的觀點，揭示了曲率張量如何影響測地線族的演化。

在廣義相對論中，這種聯繫非常重要，因為它展示了引力並不是一種力，而是時空幾何的表現。潮汐力即是時空彎曲（由Riemann曲率張量描述）的物理後果，而Jacobi場則是這種彎曲對測地線行為的數學描述。



辛格(John Lighton [Synge](#) 1897~1995)是最早研究黑洞內部的物理學家之一，稱 Jacobi fields 方程是測地線偏離(geodesic deviation)方程，在引力波的研究中有應用。

[GR:[Papers](#) in honour of J.L.Synge]

<https://kknews.cc/zh-tw/science/v94o9nl.html>(盧昌海)

[引力波百年漫談]

進一步探討 Jacobi 場在量子場論或弦論中的應用。