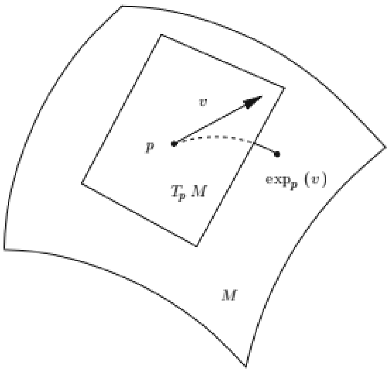
§



The exponential map

M is a manifold with an affine connection，

$\gamma_V(t)$是從 $p=\gamma_V(0)$出發、切於 V 的測地線（即$\gamma_V(0)=p,\dfrac{d\gamma_V}{dt}(0)=V$）

給定 $p\in M$ ，定義$Exp_p:T_pM\to M$ 使得 $Exp_pV=\gamma_V(1),\forall V\in T_pM$

(可以導出$\gamma_X(t)=Exp_p(tX),\forall t$)

$\gamma_V:[0,\infty)\to M$ is a geodesic。$\nabla_V V=0$

The distance function $d_p(x)$:=d(x,p) then $\left|d_p(x)-d_p(y)\right|\le d(x,y)$

我們可以使用指數映射$\exp_p$來構造 Jacobi 場，過程如下：

1. 選擇測地線族

   Let $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ be a geodesic with $\gamma'(0)=v$

   現在，考慮一族平滑變化的測地線，由光滑的變數 s 參數化：

   $\gamma(s,t)=\exp_p(t(v+sw))$ ，$w\in T_pM$

   $J(t)=\dfrac{\partial\gamma}{\partial s}\Big|_{s=0}$

   Let $\partial_t=\dfrac{\partial\gamma}{\partial t},\partial_s=\dfrac{\partial\gamma}{\partial s}=J(t)$

   $D_t\partial_t=0$ since γ is a geodesic。And $D_t\partial_s=D_s\partial_t$

   $D_tJ=D_t\partial_s=D_s\partial_t$

   $D_t^2J=D_t(D_s\partial_t)=D_sD_t\partial_t+R(\partial_t,\partial_s)\partial_t=R(\partial_t,\partial_s)\partial_t$ （$\because D_t\partial_t=0$）

   $\dfrac{D^2J}{dt^2}+R(J,T)T=0$ is the Jacobi equation。

   Where $T=\partial_t,J=\partial_s$ and R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z。

§ 透過指數映射構造的 Jacobi 場有以下幾何意義：

1. 描述測地線的無窮小變形：J(t) 告訴我們當測地線初始條件稍微改變時，測地線如何在流形上變動。

2. 與曲率的關係：如果 M 是平坦空間，則 Jacobi 場為直線函數 J(t)=at+b。但如果 M 有曲率，則 Jacobi 場的行為受到曲率張量 R 控制，特別是：
   (1) 正曲率（如球面）：測地線會收斂，Jacobi 場呈現週期性變化。
   (2) 負曲率（如雙曲面）：測地線會發散，Jacobi 場呈指數增長。

§ 球面上的 Jacobi 場

假設：γ(t) 是赤道上的一條大圓，另一條測地線稍微偏離這條大圓（如經度方向上的小擾動）。

則 Jacobi 場 J(t) 滿足：$J''(t)+J(t)=0$

解為：J(t)=Acost+Bsint

這表示測地線之間的偏移是週期性的，這與球面上的正曲率一致（測地線趨向於收斂）。

在球面上，Jacobi 場呈現週期性，而在雙曲空間中，它呈現指數增長。

這種方法在廣義相對論、最優傳輸理論（Optimal Transport）、以及幾何分析中非常重要，因為它提供了一種方式來測量流形的曲率對測地線行為的影響。