§ 測地線與哈密頓等價[N3601-2]

$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \quad \cdots(1)$

$H(x,p) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_i p_j$ Hamiltonian 動能

p_i onjugate momentum 共軛動量 (在古典力學 p=mv，在彎曲空間 $p_i = g_{ij}\dot{x}^j$)

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = g^{ij}(x)p_j \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}(x)p_j p_k \end{cases} \cdots(2)\text{哈密頓方程}$$

(1)(2)等價，可以互推

(2)$\Rightarrow$(1)

從這裡出發 $p_k = g_{ki}\dot{x}^i \Rightarrow \dot{p}_k = \frac{d}{dt}(g_{ki}\dot{x}^i) = g_{ki}\ddot{x}^i + \underbrace{\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\dot{x}^j}_{chain,law}\dot{x}^i$ （g_{ki} 是座標 x 的函數)

另一方面 $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x^k} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}p_i p_j = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$

兩式合併 $g_{ki}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$ (注意到 $\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$ run for i，j)

$g_{ki}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$

兩邊同乘 g^{mi} 得 $\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$

既然已經有測地線方程了，為什麼還要用哈密頓系統？

1. 降階處理：將二階方程降為一階方程，在數值計算（電腦模擬）時通常更穩定。
2. 守恆律：透過哈密頓函數 H，可以很容易觀察到能量守恆或其他對稱性（例如如果 g^{ij} 不隨某個坐標改變，那麼對應的動量 p_k 就是常數）。
3. 量子化：如果您想研究量子力學在彎曲空間的表現，哈密頓形式是銜接量子力學必經的橋樑。