

$\{x^2 + y^2 = 1 \mid x, y \in \mathbf{R}\}$  is a circle. Is it simply connected?

定義：

一個拓撲空間是單連通的 (simply connected)，若：

1. 它是連通的 (path-connected)，即任何兩點之間都有連續路徑連接。
2. 它的基本群 (fundamental group) 是平凡的，即任何封閉路徑 (loop) 都可以連續變形為單點 (可縮為一點)。

圓周是連通的：它是一條封閉曲線，任意兩點之間都可以沿著圓周找到連續的路徑，故為連通空間。

圓周的基本群：

單位圓周的基本群  $\pi_1(S^1)$  是  $\mathbf{Z}$ ，表示環繞圓周的不同同倫類 (每次繞行圓周可以計數)。

這意味著圓周上的閉合路徑無法全部收縮為一個點 (例如，完整繞圓一圈的路徑無法收縮為一個點)。

基本群不是平凡群，所以圓周不是單連通的。

結論：單位圓周  $S^1$  不是單連通的，因為它的基本群為  $\mathbf{Z}$  而非平凡群。