§ Divergence

在[向量場的微積分]中，散度、梯度、旋度 合併為 Stokes 定理。

在流形上座標變換並不容易。怎樣把 R^3 中的微積分搬到黎曼幾何，需一點手段。

1. R^3 中，通量對體積的變化率

(1) 向量場 E，$divE = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_S \mathrm{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z}$

靜電場 E $divE = 4\pi\rho$，ρ 是電荷密度

散度定理 $\iint_S E \cdot ndS = \iiint_V divEdV$

(2) Differential form，Ω 是 R^3 中的有界區域

$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

則 $d\omega = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz$ 稱為 divergence。

(3) 在黎曼流形上向量場 W，$A_w : X \to \nabla_X W$，∇ 是 Levi-Civita connection

$$divW = trA_w = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} < A_w X, X > dS = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} X < W, X > dS$$

$= \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} <A(\ X\ ), X >\ d$，$\omega_{n-1}$ 是 n-1 維球體積。

2. 散度定理

(1) 即 $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

(2) 向量形式 $\iint_{\Omega} \mathrm{E} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div\mathrm{E}dV$

(3) 黎曼流形上的散度定理 $\int_{\partial\Omega} < W, v > dS = \int_{\Omega} (divW) dW$

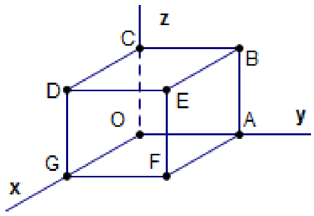
v 是 $\partial\Omega$ 上朝外的單位法向量 [大域微分幾何]p.335

3. ρ 是電荷密度 $J = \rho V$ 是電流密度

連續方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$

擴散方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = k \nabla^2 \rho$

例1.　面積分



A=[2x−z, x^2y, −xz^2]

S_1:DEFG，$\vec{n}=(1,0,0)$，x=1，

$$\iint_{S_1}\vec{n}\,A dS=\int_0^1\int_0^1(2-z)dydz=\frac{3}{2}$$

$S_2:ABCO$，$\iint_{S_2}\vec{n}\cdot A dS=\int_0^1\int_0^1 zdydz=\frac{1}{2}$

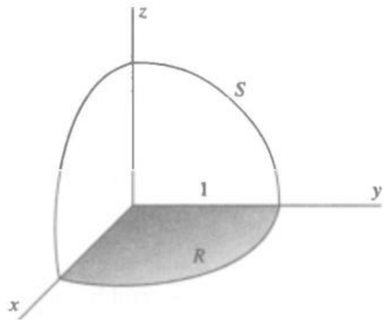
六個面積分加起來...$\iint_S\vec{n}\cdot AdS=\frac{11}{6}$

By Divergence 定理，$\iint_S\vec{n}\cdot AdS=\iiint_V\nabla\cdot AdV$

$\nabla\cdot A=\frac{\partial}{\partial x}(2x-z)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial z}(-xz^2)=2+x^2-2xz$

$$\iiint_V\nabla\cdot AdV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(2+x^2-2xz)dxdydz=\frac{11}{6}$$

例2.　面積分



S：球心在原點，半徑=1 的$\frac{1}{8}$球面

求$\iint_S z^2dS=$

$$X(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$X_x=(1,0,-\frac{x}{z}),X_y=(0,1,-\frac{y}{z})$$

$$E=X_x\cdot X_x=\frac{x^2+z^2}{z^2},F=X_x\cdot X_y=\frac{xy}{z^2},G=X_y\cdot X_y=\frac{y^2+z^2}{z^2}$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}dxdy=\frac{1}{z}dxdy$$

$\iint_S z^2dS=\iint_R zdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}drd\theta=\frac{\pi}{6}$，let　$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

Let　$\vec{F}=(0,0,z),\vec{n}=(x,y,z)$，$divF=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=1$

Then $\iint_S z^2 dS = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V dV = \frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$

§ Divergence of vector field X is given by $divX = tr(\nabla X)$

In coordinates this is $divX = dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X)$

And with repect to an orthonormal basis $divX = g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^i})$

Now $A_W : X \to \nabla_X W$ ，S^{n-1}是單位球，$|X| = 1$

驗證$tr(A) = \frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} < A(X), X > dS$ [大域微分幾何 p.280]

例3. W=(x+2y，4x+3y) 求 div W=

$X = (\cos\theta, \sin\theta)$ ，$W(X) = (\cos\theta + 2\sin\theta, 3\cos\theta + 4\sin\theta)$

則$< W(X), X >= \cos^2\theta + 6\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta$ ，$\omega_1 = 2\pi$

$$\frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}} < W(X), X > dS = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta + 6\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{2}{2\pi}(\frac{1+3}{2})\times 2\pi = 4 = divW$$

假設在 n=2 的情況下

$$\nabla_X Y = \sum_i (XY^i - \Gamma^i_{jk} X^j Y^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

W=(x+2y,4x+3y),X=$(u,v) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$

$$\nabla_X W = \sum_i XW^i \frac{\partial}{\partial x^i} = (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})(x+2y)\frac{\partial}{\partial x} + (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})(4x+3y)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= (u+2v)\frac{\partial}{\partial x} + (4u+3v)\frac{\partial}{\partial y} = A_W\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

所以$A_W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ [大域微分幾何 p.281]

$divW = tr(\nabla W)$

$$\nabla\cdot W = \frac{\partial}{\partial x}(x+2y) + \frac{\partial}{\partial y}(4x+3y) = 1+3 = 4$$

即$divW\Big|_{(0,0)} = \frac{2}{2\pi}\iint_V \nabla\cdot W dV = \frac{1}{\pi}\times 4\times\iint_V dV = 4$ ，其中 V 是單位圓。

即 $divW\big|_{(0,0)} = tr(A) = 4$

註：

1. 須繞路的原因是一般而言 Manifold 上 $\Gamma_{ij}^{k} \neq 0$

在[大域微分幾何]p.281 最後一行說，這積分式表示散度有平均的概念

Laplacian $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，在 Manifold 上 Δ 在座標變換上不順暢，因此考慮

$\Delta := div(grad)$

在 Manifold M 上 grad f 是一個向量場，用黎曼度量作內積 $< gradf(x), v >= df(v)$

Div 的定義是由 $L_X(dV) = (divX)dV$ 定義 div X，

其中 L_X 是 Lie derivative，$dV = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ 是 volume element

當然，就上文 divergence 的另一種定義是 $divX = tr(\nabla X)$

在流形上 Laplacian f :=div(grad f)

§ Maxwell 方程

$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$

$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$

[Spacetime and Geometry] p.101

§ Covariant divergence of V^μ

$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda$

可證得 $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$，$\therefore \nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu)$