在黎曼幾何中，比較定理通常是透過**比較曲率**來推導某個流形的幾何或拓撲性質(透過比較已知的對象來推導未知對象的性質。)

1. 測地線行為與距離估計：影響距離結構與凸性。
   (1) Toponogov's Triangle Comparison Theorem：若一個流形的曲率下界已知，則它的三角形形狀可與常曲率空間中的三角形進行比較。
   (2) Bonnet-Myers Theorem：若流形的里奇曲率有正下界，則該流形是有界的，並且其直徑有上界。
2. 估計體積與測度增長：限制測度與流形極限行為。
   (1) Bishop-Gromov Volume Comparison Theorem：
   若里奇曲率有下界 $Ric_M \geq (n-1)K$ ，則流形的球體積增長不超過常曲率空間的對應體積。

   令 M_K^n 為具有常數截面曲率 K 的 n 維空間形式（即球面 S^n 、歐氏空間 R^n 、或雙曲空間 H^n ）。則對於任意點 p∈M，測地球 B(p,r) 的體積滿足：
   $\dfrac{Vol(B(p,r))}{Vol_K(B_K(r))}$ 是遞減函數。特別地，當 K=0，我們得到 $Vol(B(p,r)) \leq \omega_n r^n$ ，其中 ω_n 是 n 維歐氏空間單位球的體積。

幾何意義

1. 當 K>0（例如球面），測地球的體積增長比歐幾里得空間慢（因為球面具有正曲率，會限制測地球的擴展）。
2. 當 K=0（即歐幾里得空間），測地球的體積增長為 r^n 的比例。
3. 當 K<0（例如雙曲空間），測地球的體積增長比歐幾里得空間快（因為負曲率會導致空間「發散」得更快）。

這個定理的簡單形式提供了一種基本的方法來比較不同幾何空間中的體積增長，並且是許多幾何分析結果的基礎。

3. 限制拓撲結構：推導單連通性與同胚類別。
   (1) Cheeger’s Finiteness Theorem
   (2) Synge's Theorem：若一個偶數維流形的截面曲率為正，則該流形必定單連通。
4. 幾何分析與 PDE：影響 PDE 解的性質。
   (1) Li-Yau 熱核估計：透過里奇曲率比較來限制熱核的行為，用於研究哈密頓 Ricci 流。
   (2) Cheng’s Eigenvalue Comparison Theorem：利用體積比較來限制拉普拉斯

算子的特徵值。

§ The Laplacian comparison theorem

設(M,g) 是一個 n 維完備黎曼流形，並考慮到某個點 p 的測地距離函數：
$r(x)=d(p,x)$

在 M 的某個範圍內是光滑的（即 p 不在 x 的割集（cut locus）內）。

Laplacian Comparison Theorem 主要比較 M 上的拉普拉斯算子 Δr 與某個模型空間（如球面、歐幾里得空間或雙曲空間）上的對應量。

令 M 的里奇曲率在所有徑向方向上有界： $Ric_M(\nabla r,\nabla r)\geq(n-1)K$ 則
$\Delta r(x)\leq\Delta r_K(r)$

其中 K 是常數，對應於某個比較空間 M_K^n（即常數截面曲率為 K 的 n 維完備空間形式，如球面、歐式空間或雙曲空間)。

$\Delta r_K(r)$是是對應於常數曲率 K 的空間 M_K^n 中的距離函數 r 的拉普拉斯。

THEOREM 1.59 (Laplacian Comparison). *If* (M^n,g) *is a complete Riemannian manifold with* $\mathrm{Rc}\geq-(n-1)H$, *where* $H>0$, *and if* $p\in M^n$, *then for any* $x\in M^n$ *where* $d_p(x)$ *is smooth, we have*

$$\boxed{\Delta d_p(x)\leq(n-1)\sqrt{H}\coth\left(\sqrt{H}d_p(x)\right).}\tag{1.68}$$

On the whole manifold, the Laplacian comparison theorem (1.68) holds in the ***sense of distributions****. That is, for any nonnegative* C^∞ *function* φ *on* M^n *with compact support, we have*

$$\int_{M^n}d_p\Delta\varphi d\mu\leq\int_{M^n}(n-1)\sqrt{H}\coth\left(\sqrt{H}d_p\right)\varphi d\mu.$$

幾何意義

這個定理提供了一個比較工具，用來分析流形的幾何性質，例如：

1. 體積比較：利用 Δr 的估計，可以推導體積比較定理（Bishop-Gromov 不等式）。
2. 度量幾何控制：如果某個流形的里奇曲率下界較大，則其幾何行為會受到強烈約束，例如測地球的體積增長受限。
3. 譜幾何應用：在分析流形的譜理論（例如拉普拉斯算子的特徵值）時，這些比較定理提供了基本工具。