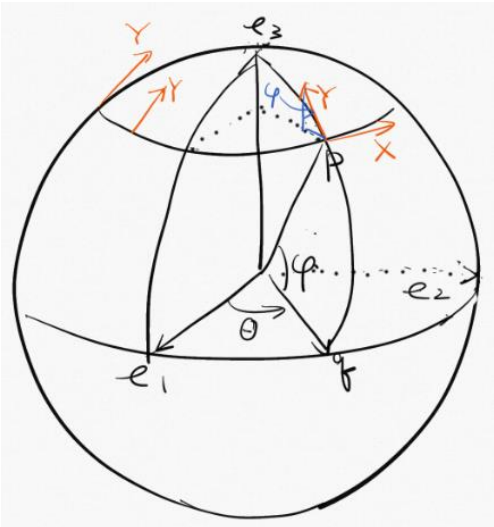
§ 共變微分(covariant derivative)

$\nabla : T_pM \times \nu(M) \to T_pM$

對 R^3 中的曲面 M, $X \in T_pM, Y \in \nu(M)$

則$\nabla_X Y = (D_X)^T$,沿 X 取向量場 Y 的微分,再取切部(在切平面T_pM 的投影

例 半徑=1 的球面 S^2,北緯φ的小圓Γ



e_3 是北極

Y 是切於經線 指向北方的單位向量場

$p \in \Gamma, e_1, e_2, e_3$ 是正交標架

$p = (\cos\varphi)q + (\sin\varphi)e_3, q = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ X 是小圓Γ的切向量

$Y = (-\sin\varphi)q + (\cos\varphi)e_3$

$$X = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \cos\varphi(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)$$

(換句話 $q = [\cos\theta, \sin\theta, 0]$, $p = [\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi]$)

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^T = (\frac{\partial Y}{\partial \theta})^T = (-\sin\varphi\frac{dq}{d\theta})^T = (\sin\varphi\sin\theta e_1 - \sin\varphi\cos\theta e_2)^T$$

設 $A = [\sin\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\theta, 0]$,顯然 $A \cdot p = 0$,換句話說 A 只有切部分

所以$\nabla_X Y = (\sin\varphi)(\sin\theta e_1 - \cos\theta e_2) = (-\sin\varphi)\frac{X}{|X|} = (-\tan\varphi)X$

($|X| = \cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$)