Spacetime and Geometry by Sean Carroll

第四章 重力(Gravitation)

§ 4-1 Physics in curved spacetime

1. 重力場如何影響物質的行為？
2. 物質如何決定重力場？

EEP(Einstein Equivalence Principle 等效原理 1915)：重力場與以適當加速度運動的參考是等價的。

In small enough regions of spacetime，the laws of physics reduce to those of special relativity；it is impossible to detect the existence of a gravitation field by means of local experiments。

Gravity is universal。

牛頓力學

1. $a = -\nabla\Phi$ 其中 a 是加速度，ϕ 重力位能(gravitational potential)。
2. Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ 其中 ρ 是物質密度，G 是重力常數。

Poisson equation：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=4\pi\rho$

($\rho = 0$ ，$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$ 稱為 Laplace equation)

In GR，curvature of spacetime acts on matter to manifest itself as gravity，and energy and momentum influence spacetime to create curvature。

例如 在平直(flat)空間沿直線運動，在廣義相對論中，不受力的物質沿測地線運動。

Minimal-coupling principle 最小耦合原理：

1. Take a law of physics, valid in inertial coordinates in flat spacetime.
2. Write it in a coordinate-invariant (tensorial) form.
3. Assert that the resulting law remains true in curved spacetime.

直線方程式 $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=0$ 變成測地線方程式 $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}=0$

把偏微分 $\partial\mu$ 換成共變微分 ∇_μ

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=0\overset{chain.rule}{\rightarrow}\frac{dx^\upsilon}{d\lambda}\partial_\upsilon\frac{dx^\mu}{d\lambda}=0\rightarrow\frac{dx^\upsilon}{d\lambda}\nabla_\upsilon\frac{dx^\mu}{d\lambda}=0\rightarrow$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0\cdots\text{geodesic equation}$$

Therefore，free particles move along geodesic in GR。

另一個例子：

平直時空的能量-動量守恆(energy-momentum conservation)：

$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$，推廣到彎曲時空 變成 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$

即 $\partial_\mu T^{\mu\upsilon}=0\rightarrow\nabla_\mu T^{\mu\upsilon}=0$

牛頓重力

質點慢速運動(相對於光速) 即 $\frac{dx^i}{d\tau}\ll\frac{dt}{d\tau}$，所以測地方程變成

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=0$$

因為場不隨時間改變(the field is static $\partial_0 g_{\mu\nu}=0$)，

$$\Gamma^\mu_{00}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0}+\partial_0 g_{0\lambda}-\partial_\lambda g_{00})=-\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00}$$

因為重力場很弱，允許我們把 metric 分解成 Minkowski 形式與一個微擾 (perturbation) $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},\left|h_{\mu\nu}\right|<<1$，$h_{\mu\nu}$ 是一個小擾動

…以下不懂

§ 4-2 Einstein's equation $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$ ， $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor

愛因斯坦方程式：度量(metric)如何回應能量與動量。
想要找一個方程式來取代牛頓勢中的 Poisson 方程式

$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho$ ，where $\nabla^2=\delta^{ij}\partial_i\partial_j$ is the Laplacian in space

左式是一個二階微分算子作用在重力勢上，右式是物質分布的度量。
方程式的推廣(相對論式的)必須是張量。
(A relativistic generalization shoud take the form of an equation between tensors。)

而物質密度 ρ 的張量推廣是能量-動量張量 $T_{\mu\nu}$ ，同時重力勢要被度量張量取代。

$[\nabla^2 g]_{\mu\nu}\propto T_{\mu\nu}$ 沿這個思路

左式，黎曼張量 $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ 是度量(metric $g_{\mu\nu}$)的二階微分、入選。足碼數不相同，所以縮併、取 Ricci 張量 $R_{\mu\nu}$ ，因此猜想重力場方程式長這樣 $R_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu}$ ，其中 κ 是常數。

… 種種思量後(因為 $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu}=0$)，考慮愛因斯坦張量 $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$
最後結論：

$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$ ， $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor

(or $Ric-\frac{1}{2}Sg=8\pi E$ where S is the scalar curvature，E is the energy-momentum tensor。)

It can be rewritten as $Ric=8\pi T$ where $T:=E-\frac{1}{2}(\sum_{\mu,\nu=0}^{3}g^{\mu\nu}E_{\mu\nu})g$ is the reduced energy-momentum tensor

By wiki
Einstein field equation：

$G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu}$ where $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ ， Λ is the cosmological constant

κ is the Einstein gravitational constant， $T_{\mu\nu}$ is the stress-energy tensor。

[引力波百年漫談]
https://www.changhai.org/articles/science/physics/gravitationalwave/
https://profoundphysics.com/

§ 4-3 Lagrangian Formulation
通過最小作用量原理得到愛因斯坦方程式。
這裡有提到 D.Hilbert action 還有 Neother 定理：
Every symmetry of a Lagrangian implies the existence of a conservation law。