§ 微分方程的特徵值與特徵函數分析

(1) y=y(t)，$\frac{d}{dt}y=\lambda y$ then $y(t)=Ae^{\lambda t}$

$\frac{d}{dt}$是一個微分算子，λ是特徵值，y 是特徵函數。

(2) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

這是向量形式的特徵方程

$\begin{cases}x'=3x-2y\\ y'=2x-2y\end{cases}$是一個微分方程組，其一般解為$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t}$

算出 A 的特徵值$\lambda_1=2$，特徵向量$v_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$；，$v_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

系統(x(t),y(t))的相流(phase flow)由矩陣 A 的特徵值決定，因為特徵值一正一負，系統的相流呈現鞍點(saddle point)的特性：

- 不穩定方向：對應特徵值$\lambda_1=2$的特徵向量為$v_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$。沿此方向的軌跡會隨時間指數增長，遠離原點。
- 穩定方向：對應特徵值$\lambda_2=-1$的特徵向量為$v_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$。沿此方向的軌跡會隨時間指數衰減，趨近原點。

除特徵向量方向外，其他軌跡會呈現鞍形。
初始條件靠近穩定方向的點會先趨近原點，但隨後被不穩定方向拉離，形成彎曲路徑。
原點為不穩定鞍點，既有吸引（穩定方向）又有排斥（不穩定方向）的特性，整體系統無週期性或螺旋行為。
相流表現為鞍點結構，軌跡沿特徵向量方向伸展或收縮，伴隨面積放大與方向反轉，形成典型的非穩定性動態。

§ 具體實例

1. 機械系統：不穩定平衡點附近的運動 例如倒立擺
2. 電路系統

例子：含非對稱元件的耦合振盪電路

若電路中包含非對稱的電感、電容或非線性元件（如二極體），其電壓-電流方程可能簡化為：

$$\begin{cases}\frac{dV}{dt}=3V-2I\\ \frac{dI}{dt}=2V-2I\end{cases}$$

3. 生態模型

例子：兩物種資源競爭的鞍點平衡

假設物種 x 和 y 的增長率受資源限制：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y & (\text{物種 } x \text{ 有內生增長，但受 } y \text{ 抑制}) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y & (\text{物種 } y \text{ 依賴 } x \text{ 但自身衰減}) \end{cases}$$

(1) 鞍點平衡：初始族群比例若接近穩定方向（如 $y \propto 2x$），物種共存；若偏向不穩定方向（如$x \gg y$），物種x爆發性增長並驅逐y。

(2) 行列式負值：反映競爭關係中資源分配的「非互惠性」（如掠食者-獵物的不對稱互動）。

4. 化學反應

例子：自催化反應與抑制劑的耦合系統

考慮反應物濃度 x 和抑制劑濃度 y 的動力學：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y & (x \text{ 自催化生成，但被 } y \text{ 抑制}) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y & (y \text{ 由 } x \text{ 生成，同時自我降解}) \end{cases}$$

5. 經濟模型

例子：價格與庫存的動態調整

假設價格 x 和庫存 y 的關係為：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y & (\text{高價格刺激生產，但高庫存壓抑價格}) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y & (\text{生產速度依賴價格，庫存自然損耗}) \end{cases}$$

(1) 鞍點均衡：若庫存控制得當（沿穩定方向），市場穩定；若生產過剩（沿不穩定方向），價格崩潰。

(2)行列式負值：反映供給鏈中「反饋延遲」導致的振盪風險。