

§ Jacobi fields

Jacobi field 在黎曼幾何中扮演著變分理論的核心角色，不過它在兩種不同的幾何背景中會有不同的幾何意義與數學形式：

測地線上的 Jacobi field 和 CMC 曲面上的 Jacobi field。

項目	測地線上的 Jacobi field	CMC 曲面上的 Jacobi field
幾何背景	黎曼流形中的測地線	常平均曲率曲面
本質	向量場沿測地線	法向變形函數（或場）
方程型態	二階常微分方程（ODE）	二階橢圓偏微分方程（PDE）
幾何意義	測地線變分與曲率影響	曲面穩定性與變形保留 CMC 性質
曲率影響	出現在 $R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$	出現在 $\ A\ ^2 + \text{Ric}(N, N)$

例如在球面 S^2 上

測地線：

球面上的測地線就是大圓（如赤道、經線等），是局部最短路徑。

Jacobi field 的解釋：

假設我們沿著赤道 $\gamma(t)$ 走， $\gamma(t)$ 是一條大圓測地線。設 $J(t)$ 為一個垂直於 $\dot{\gamma}(t)$ 的變分向量場，即「鄰近大圓」的偏離。

Jacobi equation：

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + J = 0 \quad J(t) = A \cos t + B \sin t$$

CMC 曲面上：

球面本身是具有常均曲率的閉曲面，在單位球面中，均曲率 $H=1$ 。

Jacobi operator 在 S^2 上為 $L(f) = \Delta f + 2f$ ，這裡 $|A|^2 = 2$

(CMC 曲面上的 Jacobi operator 通常寫成這樣 $L = \Delta + |A|^2 + \text{Ric}(N, N)$)

Jacobi equation $L(f) = 0 \Rightarrow \Delta f + 2f = 0$ 是 Laplace eigenvalue 的問題。

解空間：

這個方程的非平凡解是球面上拉普拉斯算子的第一個特徵空間（特徵值-2），也就是限制在球面上的線性函數： $f(x,y,z)=ax+by+cz$

這些對應於球面在 x, y, z 方向的平移變形，保持 CMC 性質。

幾何直觀：

- (1) 球面沿著法向微小平移仍是球（仍是 CMC），這些對應的變形函數 f 就是 Jacobi fields。
- (2) 反映的是球面在變形下的穩定性。由於只有 3 維的非平凡解（對應剛體平移），表示球面是穩定的 CMC 曲面。

觀點	測地線上的 Jacobi Field	球面作為 CMC 曲面的 Jacobi Field
定義對象	沿赤道的變分向量場	球面的法方向變形函數
方程	$J'' + J = 0$	$\Delta f + 2f = 0$
解的性質	$\sin t, \cos t$ 型，描述測地線偏離與焦點	球面上的線性函數，如 x, y, z
幾何意義	測地線之間的發散與聚焦	球面穩定性與剛體平移變形

§ 關於 CMC 曲面上的 Jacobi fields 的書籍與文章
 ChatGPT 建議

- Lectures on Differential Geometry R.Schoen and S-T.Yau
- Differential Geometry of Curves and Surfaces Manfredo P.do Carmo
- Minimal Surfaces Vol I and II … , Friedrich Sauvigny
- A Survey of Minimal Surfaces Robert Osserman
- The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature
Korevaar, Kusner, Solomon (1989)
- Kusner, R. - Conformal Geometry and Complete Minimal Surfaces (1986, PhD Thesis)
- Rosenberg, Harold - Constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces (2002)

DeepSeek 建議

- Riemannian Geometry and Geometric Analysis by Jürgen Jost
第六章討論了極小曲面和平均曲率的基礎，並在變分問題中提及 Jacobi 場，可延伸至 CMC 曲面的分析。
- Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary by Rafael López
專注於 CMC 曲面的邊值問題，包含變分法與 Jacobi 場的應用，適合深入理解穩定性分析。
- Bifurcation Theory of Minimal Surfaces and Constant Mean Curvature Surfaces by Friedrich Sauvigny

討論 CMC 曲面分岔現象，涉及線性化方程（Jacobi 方程）在分岔點的作用。

4. A Course in Minimal Surfaces by Tobias Colding & William Minicozzi

雖以極小曲面為主，但對 Jacobi 場的處理方法可類比至 CMC 曲面的情形。

研究論文

5. Rossmann, W. (1991). *Jacobi fields on constant mean curvature surfaces*. Pacific Journal of Mathematics, 149(1), 147 – 158.

直接討論 CMC 曲面上的 Jacobi 場，分析其存在性與性質。

6. Koiso, M. (1986). *Stability of Constant Mean Curvature Surfaces in Three-Dimensional Manifolds*. Mathematische Zeitschrift, 191, 567 – 574.

研究 CMC 曲面的穩定性，Jacobi 場在此作為穩定性分析的關鍵工具。

7. Mazzeo, R., & Pacard, F. (1996). *Constant Mean Curvature Surfaces with Delaunay Ends*. Communications in Analysis and Geometry, 4(4), 695 – 733.

構造帶有 Delaunay 末端的 CMC 曲面，線性化分析涉及 Jacobi 場。

8. Große-Brauckmann, K. (1997). *Stable Constant Mean Curvature Surfaces*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 5(2), 139 – 155.

探討 CMC 曲面的穩定性，分析 Jacobi 算子的譜性質。

§ Morse index theorem

臨界點的穩定分析

- (1) Jacobi 場測地線：測地線是能量泛函的臨界點，Morse index 定理通過計算沿測地線的共軛點數量，給出測地線的「不穩定方向數」（即指數）。指數越高，測地線越不穩定。
- (2) CMC 曲面：CMC 曲面是面積泛函在固定體積約束下的臨界點。其穩定性由二階變分決定，Morse index 定理將指數聯繫於 Jacobi 算子的負特徵值數量。

Jacobi 方程

- (1) 測地線的 Jacobi 方程滿足 $\nabla_T^2 J + R(J, T)T = 0$

- (2) CMC 曲面上的 Jacobi operator： $Lu = \Delta u + |A|^2 u + Ric(N, N)u$

指數的計算方式：

- (1) 測地線：指數等於共軛點數量（與參數區間長度相關），反映測地線局部的不穩定性。
- (2) CMC 曲面：指數為 Jacobi 算子的負特徵值數量，需分析全域性譜結構，可能涉及曲面拓撲（如虧格）與曲率條件。

應用：

- (1) 測地線：用於研究流形拓撲（如閉測地線存在性）、奇點理論。
- (2) CMC 曲面：應用於肥皂膜實驗（極小曲面）、毛細現象、廣義相對論中孤立子的穩定性分析。

比較維度	Jacobi場測地線	CMC曲面
數學工具	ODE與共軛點分析	PDE與橢圓算子譜理論
指數計算	離散共軛點計數	連續特徵值分佈與負譜計數
約束條件	無	體積約束與拉格朗日乘子
幾何影響因素	流形曲率沿測地線的分佈	曲面自身曲率、環境空間曲率、平均曲率符號
典型應用	流形拓撲分類、動力系統	物理界面建模、幾何分析

§ 王慕道院士提到一個第二變分式 $\frac{\partial}{\partial s} H = -|A|^2 - Ric$

其中 $H = \lambda_1 + \lambda_2$ ， $|A|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ ，Ric 是曲面法方向的 Ricci 曲率。

因為 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \geq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2}$ 得到 $\frac{\partial}{\partial s} H \leq -\frac{H^2}{2} - Ric$

若知道 Ricci 的下界，可得到 H 的估計。

Laplace comparison theorem：

若 Σ 為嵌入黎曼流形(M,g)中的曲面，其法向量為 N。若背景流形 M 的法方向 Ricci 曲率滿足下界： $Ric(N, N) \geq k, k \in R$

則曲面上的均曲率 H 的 Laplace-Beltrami 算子滿足以下不等式：

$$\Delta H \leq -H^2 - k$$

此定理為比較曲面在不同曲率背景下的幾何演化提供了定量工具，常見於平均曲率流、穩定極小曲面及共形幾何的研究中。