

散度定理/黎曼幾何筆記

「梯度、旋度、散度。」向量微積分中從靜電場出發到馬克士威爾的電磁學，

這是物理層面。數學方面則統合為 Stokes 定理 $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ 。

古典的向量場理論則從 Green 定理，Stokes 定理到 Gauss 定理(散度定理)是微分幾何的基礎工作，當然，微分形式(differential forms)與之相輔相成。

這裡僅就散度定理(divergence theorem)方面，個人學習黎曼幾何的經驗與大家分享。

§ 01 R^n 中的散度定理寫成這樣 $\int_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS$

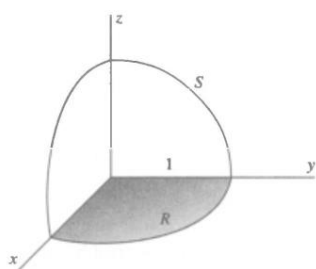
(1) 在 R^3 中的(1)向量形式為 $\iint_S E \cdot n dS = \iiint_V \operatorname{div} E dV$

(2) differential forms 的形式：

Ω 是 R^3 中的有界區域， $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

則 $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ 稱為 divergence。

舉一例：



S ：球心在原點，半徑=1 的 $\frac{1}{8}$ 球面，求 $\iint_S z^2 dS =$

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

$$X_x = (1, 0, -\frac{x}{z}), X_y = (0, 1, -\frac{y}{z})$$

$$E = X_x \cdot X_x = \frac{x^2 + z^2}{z^2}, F = X_x \cdot X_y = \frac{xy}{z^2}, G = X_y \cdot X_y = \frac{y^2 + z^2}{z^2}$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dx dy = \frac{1}{z} dx dy$$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_R z dx dy, \text{ let } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\text{Then } \iint_R z dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{假設 } \bar{F} = (0, 0, z), \bar{n} = (x, y, z), \text{ 則 } \bar{F} \cdot \bar{n} = z^2 \text{ 且 } \operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$$

$$\text{由散度定理 } \iint_S z^2 dS = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iiint_V dV = \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$$

§ 02 在黎曼流形上

W 是黎曼流形 (M, g) 上的向量場

$\operatorname{div} W = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle A(X), X \rangle dS$ ，其中 $A_W: X \rightarrow \nabla_X W$ ， ∇ 是 Levi-Civita 聯絡。

用李導數(對體積元)的表示： $L_X \mu = (\operatorname{div} X) \mu = d(\iota_X \mu)$ ，其中 μ 是體積元。

散度定理就寫成這樣： $\int_M \operatorname{div} X \mu = \int_{\partial M} \iota_X \mu$ ，其中 $\omega = \iota_X \mu$ ， $d\omega = (\operatorname{div} X) \mu$

註：

[大域微分幾何] p.335

$\int_{\Omega} (\operatorname{div} W) dM = \int_{S=\partial M} \langle W, \nu \rangle dS$ ，其中 ν 是 S 上朝外的單位法向量。

例：

M 是 R^3 中的單位球，取 $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ ， $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$

則 $\operatorname{div} X = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

左式 $\int_M (\operatorname{div}) \mu = 3 \int_M dx \wedge dy \wedge dz = 3 \times \frac{4\pi}{3} = 4\pi$

依定義內積運算為 $\iota_X (dx \wedge dy \wedge dz) = X^x dy \wedge dz + X^y dz \wedge dx + X^z dx \wedge dy$

右式 $\omega = \iota_X \mu = x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy$

單位球面上，法向量為 $n(x, y, z)$ ，故 $X \cdot n = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} dA = 4\pi$ 。

另一方面，在 R^3 中， $\operatorname{div} X = \partial_i X^i = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}$

在 (M, g) 中， $\operatorname{div} X = \partial_i X^i + \Gamma_{ik}^i X^k$ (寫成 $\operatorname{div} X = \nabla_\mu X^\mu$)

右因為 $\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \sqrt{|g|}$ ， $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i)$

在歐氏空間中直線方程式是 $\ddot{x}^k = 0$ ，在黎曼流形中測地線則多了一項變成

$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$ 。(這是根據最小耦合原理)

同理，散度在歐氏空間中為 $\operatorname{div} X = \partial_i X^i$ ，在彎曲空間中的散度則多一項

$\Gamma_{ik}^i X^k$ 。

舉一例，在 S^2 上計算：

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad |g| = r^4 \sin^2 \theta$$

$$\text{考慮 } X = X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{|g|} X^\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\sqrt{|g|} X^\phi) \right], \quad \sqrt{|g|} = r^2 \sin \theta$$

$$\text{代入計算，化簡得 } \operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta X^\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial X^\phi}{\partial \phi}$$

$$\text{例如取 } X^\theta = \sin \theta, X^\phi = \cos \phi \text{ 則 } \operatorname{div}(X) = 2 \cos \theta - \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

在黃武雄老師[大域微分幾何] p.280

$$\operatorname{div} W = \operatorname{tr} A_w = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle A_w X, X \rangle dS = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} X \langle W, X \rangle dS$$

$$= \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle A(X), X \rangle dS$$

舉例說明之：

$$\text{設 } W(x, y, z) = (x^2, y, z), \text{ 則 Jacobian matrix } J_w = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \operatorname{tr}(J_w) = 2x + 2$$

$$\text{Operator } A : A(X) = J_w \cdot X = 2xX^1 + X^2 + X^3$$

$$\langle A(X), X \rangle = 2xX_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$\text{因為對稱性， } S^2 : \int_{S^2} X_i^2 dS = \frac{4\pi}{3} \text{ for } i=1,2,3$$

$$\text{所以 } \int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS = \frac{4\pi}{3} (2x + 2)$$

$$\frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle A(X), X \rangle dS = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} (2x + 2) = 2x + 2 = \operatorname{tr}(J_w)$$

$$\text{再舉例驗證 } \operatorname{tr}(A) = \frac{3}{4\pi} \int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS$$

$$\text{取 } F(x, y, z) = (yz, xz, xy), \quad X = (X_1, X_2, X_3) \text{ 是 } S^2 \text{ 上的單位向量, } A(X) = \nabla_X F = J_F \cdot X$$

$$(1) \text{ Jacobian matrix of } J : J_F = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(J_F) = 0$$

$$(2) \quad A(X) = \nabla_X F = J_F \cdot X = \begin{pmatrix} zX_1 + yX_3 \\ zX_1 + xX_3 \\ yX_1 + xX_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle A(X), X \rangle = \dots = 2zX_1X_2 + 2yX_1X_3 + 2xX_2X_3$$

$$(3) \quad S^2 \text{ 上形如 } X_1X_2 \text{ 者皆為奇函數，因此 } \int_{S^2} X_1X_2 dS = \dots = 0$$

$$\text{所以 } \int_{S^2} \langle A(X), X \rangle dS = 0$$

§ 03 Green identity 的形式

u, v 是 R^n 的子集 Ω 中的光滑純量函數， Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 逐段光滑，則

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS \cdots (1)$$

其中， Δ 是 Laplacian， ∇ 是 gradient， $\frac{\partial v}{\partial n}$ 是 normal derivative $= \nabla v \cdot n$

註：[大域微分幾何] p.336 Green identity： $\int_{\Omega} (\Delta_M f) dM = \int_{S=\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} dS$

舉一例說明

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, v(x, y, z) = x \quad \text{則}$$

左式中， $\nabla u = (2x, 2y, 2z), \nabla v = (1, 0, 0)$ ，左式 $= \int_{\Omega} 2x d\Omega = 0$ (因為球的對稱性且

$2x$ 是奇函數。)

右式，在邊界(球面)上 $u=1$ ， $\nabla v = (1, 0, 0), n = (x, y, z), \frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n = x$

同樣因為奇函數與球面的對稱性 $\int_{\partial\Omega} x dS = 0$

(1) 的證明：

在散度定理 $\int_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS$ 中取 $F = u \nabla v$

則 $\nabla \cdot F = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$ 以 $n=3$ 為例

$$\begin{aligned}\nabla v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad F = \left(u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dots \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ &= \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v\end{aligned}$$

Green identity 很容易從第一形式改成第二形式：

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

同樣取 Ω 為單位球，取 $u = x^2 + y^2, v = z^2$ 則可以驗證

$$\text{左式} = \int_{\Omega} -4z^2 dV = -\frac{4\pi}{5}, \quad \text{右式} = \int_{\partial\Omega} (2x^2 z^2 + 2y^2 z^2 - 2z^3) dS = -\frac{4\pi}{5}.$$

另外，在偏微分方程中有一個類似的習作可供參考：

$$R^3 \text{ 中, } \Delta u = f, \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ 有解的充要條件為 } \iiint_D f dx dy dz = \iint_{\partial D} g dS$$

§ 04 divergence 與體積漲縮率

細節請看[大域微分幾何]p.324：

φ_t 是向量場 W 的 flow，則 $\text{div} W$ 是流形 M 沿 φ_t 的體積漲縮率。

§ 05 關於 Killing 向量場與 Jacobi 場

X 是 (M, g) 上的 Killing 向量場的定義是 $L_X g = 0$ 。

用局部座標表示 $L_X g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} X^{\nu} + \nabla_{\nu} X^{\mu} = 0$

Killing 向量場滿足 $\nabla_{\mu} X^{\nu} + \nabla_{\nu} X^{\mu} = 0$ ， $\text{div}(X) = \nabla_i X^i$

$\mu = \nu$ 代入 Killing equation，則 $\nabla_{\mu} X^{\mu} = 0$ 所以 $\text{div}(X) = 0$

S^2 上的六個 Killing 向量場(旋轉、平移)可以看作是球面的對稱生成元。

例如 $R = \frac{\partial}{\partial \varphi} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ 生成對 z 軸的旋轉，是一種等距變換，向量場 R 對 g

守恆，也就是說 $L_X g = 0$ ，亦即 $\text{div} X = 0$

由於這些對稱操作不會「壓縮」或「擴張」面積元素，因此對應的向量場是無散度的，這與散度在幾何上描述體積（或面積）變化率的性質一致。

Killing 向量場在對稱方面的意義與其在廣義相對論中的重要性就略過。

若在 S^2 上取一 Jacobi 場 $J(t)$ ，沿著測地線 γ 的 Jacobi 場 $J(t)$ 滿足

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0$$

$S^2: ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ ，其中 ∂_ϕ 是繞極軸的旋轉方向，對應球面的旋轉對稱

性，是一 Killing 場，因此 $\text{div}(\partial_\phi) = 0$

∂_θ 不是 Killing 場， $\text{div}(\partial_\theta) = \cot \theta$

計算過程：

$$1. \quad \text{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} X^i), \text{ 其中 } |g| = \sin^2 \theta$$

$$2. \quad \text{向量場 } X = \partial_\theta, \text{ 其對應分量 } X^\theta = 1, X^\phi = 0$$

$$3. \quad \text{因此 } \text{div}(\partial_\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \cot \theta$$

在赤道 ($\theta = \frac{\pi}{2}$)， $\text{div}(\partial_\theta) = 0$ ，表示無局部擴張或收縮。

在北半球 ($\theta < \frac{\pi}{2}$)， $\text{div}(\partial_\theta) > 0$ ，表示向量場向外發散。

在南半球 ($\theta > \frac{\pi}{2}$)， $\text{div}(\partial_\theta) < 0$ ，表示向量場向內收斂。

Jacobi 場描述測地線族之間的距離如何變化，如果這些測地線朝向匯聚或發散，Jacobi 場的散度就可以視為測地線擴張或收縮的度量。

一般而言，Jacobi field 在 S^2 上具有非零散度，這反映了測地線在球面上匯聚或發散的本質。

§ 06 散度定理與面積的變分

[大域微分幾何]p.439~441]中有：

衍理 2

考慮 M^n 到 X^{n+1} 的浸射，變分向量場 $V = \varphi N$ ， N 是 M^n 上的單位法向量(此時稱 φ 為變分函數)則

$$A'(0) = - \int_M n H \varphi dM. \text{ 其中 } H \text{ 是 } M^n \text{ 在 } X^n \text{ 中的均曲率。}$$

定理 2

$$M^n \text{ 為 } X^n \text{ 中的最小曲面} \Leftrightarrow A'(0) = \frac{d}{dv} \text{Area} M_v \Big|_{v=0} = 0$$

以下是我的理解：

考慮一個封閉曲面 $S = \partial\Omega$ ，其包圍的區域為 Ω ，體積為 V 。

我們希望在保持體積 V 不變的條件下，找到使表面積 A 最小的曲面形狀。

1. 引入 Lagrange multiplier

定義泛函 $J = A + \lambda(V - V_0)$ ，其中 λ 是 Lagrangian 乘子， V_0 是固定體積。

2. 表面積與體積的變分

(1) 表面積的(一階)變分： $\delta A = \iint_S H \phi dS$ ，其中 H 是均曲率， ϕ 是小函數，

曲面受到法向擾動 $\delta r = \phi n$

(2) 體積變分：體積 $V = \iiint_{\Omega} dV$ ，由散度定理 $\delta V = \iint_S n \cdot \delta r dS = \iint_S \phi dS$

這裡利用散度定理將體積的變化轉換為曲面法向位移的積分。

3. 結合變分條件

$$\delta J = \delta A + \lambda \delta V = 0$$

把 $\delta A = \iint_S H \phi dS$ 與 $\delta V = \iint_S \phi dS$ 代入，得 $\iint_S (H \phi + \lambda \phi) dS = 0$

因為 ϕ 是任意函數，所以 $H = -\lambda$

4. 結論

在體積約束下，最小表面積的曲面滿足均曲率為常數。

(極小曲面滿足 $H=0$ ，關於體積約束的最小面積請看[大域微分幾何] p.456~常均曲率曲面。)

唯一滿足此條件的封閉曲面是球體（球面的均曲率 $H = \frac{2}{R}$ 且處處相同）。

我們看到了在將體積變分到面積變分的過程中，散度定理起了關鍵作用。

這件事在[大域微分幾何] p.439 有提到，我只是用自己能理解的方式重述一遍而已。

至於為什麼表面積 A 的(一階)變分與均曲率有關，那是因為均曲率是衡量曲面凹凸程度的量，要詳細說明那就是另一件事了。

§ 07 參考書目

1. Div、Grad、Curl and all that H.M.Schey
2. 大域微分幾何 黃武雄 p.324~333
3. An introduction to Riemannian Geometry Jose Natario
4. Spacetime and Geometry Sean Carroll Ch03