

§

Consider the orthogonal group : $O(n) = \{A \in GL(n; R) : AA^t = I\}$

Show that $O(n)$ is a differentiable manifold , and determine its dimension .

2019 台大博士班

Orthogonal group 正交群 : $O(n)$ has two connected components .

The one that contains the identity element is a normal subgroup , called the special orthogonal group , and denotes $SO(n)$. It also called the rotation group .

在 Liegroup003 中有一個定理 :

$$M \xrightarrow{f} N, T_A M \xrightarrow{df} T_{f(A)} N$$

1. $p \in M$, 若 $(df)_p$ 是蓋射(surjective) 則稱 p 是 f 的正則點(regular point)
2. $\ker(df)_p = \{B \in T_A M \mid (df)_A B = 0\}$
3. $q \in N$, 若 $\forall p \in f^{-1}(q)$ 皆為正則點 則稱 q 為 f 的正則值

定理

$$M \xrightarrow{f} N, q \in N \text{ 是 } f \text{ 的正則值 使得 } L = f^{-1}(q) = \{p \in M \mid f(p) = q\} \neq \emptyset$$

則 L 是 M 的子流形 , 且 $T_p L = \ker(df)_p \subset T_p M$ for all $p \in L$

取 f 使得 $GL(n) \xrightarrow{f} S$ (S 是對稱矩陣) , $f(A) = A^t A$

$$(df)_A B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+hB) - f(A)}{h} = \dots = A^t B + B^t A$$

對任意對稱矩陣 S 取 $B = \frac{1}{2} AS$

$$\text{則 } A^t B + B^t A = A^t \left(\frac{1}{2} AS\right) + \left(\frac{1}{2} AS\right)^t A = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} (S^t A^t) A = S$$

所以 $(df)_A$ 是蓋射 , 由定理 取 $A=I$ 則 $f^{-1}(I) = O(n)$ 是 $GL(n)$ 的子流形

因為 $GL(n)$ 是一個可微分流形 , 自然 $O(n)$ 是一個可微分流形 .

問題是前述之定理怎麼證明 .

$$\dim(O(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$$