1. For any two principal curvature κ_1, κ_2 with the Gaussian curvature $K = \kappa_1\kappa_2$ and the mean curvature $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$，show that $H^2 \geq K$

Its easy！$H^2 - K = \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geq 0$

2. Let Σ be a closed orientable smooth surface in R^3。H is the mean curvature，Show that $\int_\Sigma \mathrm{H}^2 dS \geq 4\pi$

This is the well-known result Willmore inequality。

3. Let $f : \Sigma \to R^3$ be an isometric immersion of a smooth closed orientable Riemann surface Σ into R^3。We define the Willmore energy $W(f) = \int_\Sigma H^2 dA$

Show that $\mathrm{W}(f) \geq 4\pi$

Moreover，$W(f) = 4\pi$ if and only if Σ is embedded as a round sphere in R^3。i.e. $\kappa_1 = \kappa_2$ at every point。

The Willmore energy of Σ is defined as $\mathrm{W}(\Sigma)=\int_\Sigma \mathrm{H}^2 dS$。

The Willmore inequality states that for a closed surface in R^3，$W(\Sigma) \geq 4\pi$ with equality holding if and only if Σ is a round sphere。

Gauss-Bonnet theorem：$\int_\Sigma KdS = 2\pi\chi(\Sigma)$

For a topological sphere，$\chi(\Sigma) = 2$，so the total Gaussian curvature is 4π

$\int_\Sigma \mathrm{H}^2 dS \geq \int_\Sigma KdS \geq 4\pi$

在所有閉合曲面中，圓球是最優美且最節能的形狀，具有最小的平均曲率平方積分。

在生物學中，Willmore 能量與**細胞膜的形狀**密切相關。例如，生物膜的形狀可以通過最小化 Willmore 能量來理解。
在材料科學和物理學中，它也描述了薄膜和液晶的能量狀態。

Willmore 能量的臨界點對應於所謂的 **Willmore 曲面**。這些曲面是 Willmore 泛函的駐點，它們滿足非線性偏微分方程(Euler-Lagrange equation)：

$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$，其中 Δ 是 Laplace-Beltrami 算子，K 是高斯曲率。

ΔH 描述平均曲率在曲面上的擴散行為。

$2H(H^2 - K)$ 描述了由平均曲率與高斯曲率之間的相互作用引起的非線性效應。這個方程告訴我們，Willmore 曲面是平衡平均曲率「擴散」與「曲率能量密度」的幾何形狀。

Examples of Willmore surface：

1. Sphere
2. Clifford torus
3. Minimal surface

Willmore conjecture：
在所有嵌入 R^3 中的圓環（torus）中，Willmore 能量的最小值為 $2\pi^2$ ，且當且僅當該圓環是 Clifford 圓環時，該最小值成立。
2014 年 由 Fermando Coda Marques 與 Andre Neves 證明。
Willmore energy 在共形變換(conformal trasformation)下是不變的。在數學美感中，這種最小能量形狀的思想在多個領域中提供了統一的視角。