第四章 黎曼流形

§ 4-1

若流形 M 上存在處處可微 恆正二階對稱協變張量場 G，則稱流形 M 為黎曼流形。G 稱為度規(metric)張量場。(恆正改為非奇異 則為廣義黎曼流形)

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

流形 M 上的曲線 x(t)弧長 $\Delta s = \int (g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt})^{\frac{1}{2}} dt$

> **第三章曾指出，在局域紧流形上存在整体仿射联络，利用联络结构可定义张量场的协变微分及张量的平行输运．在定义有度规张量场的黎曼流形上，可选特殊的保度规联络，向量按此联络平行输运时保持向量的长度及向量间夹角不变，即要求度规张量场 G 的协变微分为零：**
>
> $$\nabla G = 0 \qquad (4.11)$$

定理

在黎曼流形 M 上存在唯一的無撓保度規聯絡。(Levi-Civita connection)

> **正因为有此定理，黎曼联络的和乐群也可称为度规张量场的和乐群．对于黎曼联络，平行输运保持标架场的正交性，于是具有恒正度规的 n 维黎曼流形的和乐群 $H \subset O(n)$．**

Lorentz 流形：

定理

在局域緊光滑流形 M 上允許存在正定的度規。

§ 4-2 黎曼流形上的微分形式

Hodge$*$運算、餘微分 δ、Laplace 算子Δ

Maxwell 方程

1. 庫倫定律 $divD = 4\pi\rho$
2. 磁荷不存在 divB=0
3. 法拉第電磁感應定律 $rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$
4. 安培定律$rotH = \frac{1}{c}(4\pi J + \frac{\partial D}{\partial t})$

§ 4-3 黎曼曲率張量 Ricci 張量 p.136

§ 4-4 等長變換 共形變換 p.140

§ 4-5 截面曲率 等曲率空間 p.145

§ 4-6 愛因斯坦引力場方程

牛頓引力的來源是物質，而場論中物質由體系的能量動量表達，它們是引力的來源。

一般物質能量動量張量可表為二階對稱張量$T_{\mu\nu}$，故能量動量守恆滿足

$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$；愛因斯坦將引力歸結為空間本身的度規性質，而後者又決定於空間中物質的分布，存在物質的時空會引起時空彎曲，在彎曲時空中能量動量守恆表示為$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$

愛因斯坦引力方程式

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi GT_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$R\mu\nu$ 是 Ricci 張量、R 是 scalar tensor、G 是牛頓重力常數

下面着重分析 4 维时空引力场方程变分原理. 作为物理体系的动力学场方程，常可由作用量出发用变分原理导出. 通过作用量原理，可把物理体系的对称性与守恒律紧密联系，并且通过作用量原理很易得到有相互作用的场的运动方程.

...

§ 4-7 正交標架場 自旋聯絡 時空規範場初步 p.151

n 维流形 M 上的局域坐标变换，在一点切空间中诱导的自然基矢变换矩阵为 $GL(n,R)$ 群的元素，$GL(n,R)$ 群仅有张量表示，没有旋量表示. 当我们讨论黎曼流形上的旋量场时，必须采用标架场(vierbein)的表述. 在黎曼流形上可以选取正交标架场$\{e_a(x)\}$. 它们在局域正交转动下仍是正交标架. 正交变换群 $O(n)$ 具有旋量表示. 对于具有半奇数自旋的场，必须用正交标架的变换群表示. 在正交标架丛上的黎曼联络常称为自旋联络.

在黎曼流形上可以引入處處正交的切標架向量場$e_a(x)$

$e_a(x)=e_a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}, a=1,2,\ldots,n$ 滿足

$g_{ij}e_a^i e_b^j = \eta_{ab}, g^{ij} = \eta^{ab}e_a^i e_b^j$，其中$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \pm\delta_b^a$為平度規，對歐氏空間君取正號，對閔氏空間最後一個指標$\eta_{nn} = -1$，其餘取+1

正交切标架$\{e_a(x)\}$的对偶基矢为余切向量 1 形式 $\theta^a(x)$

$$\theta^a(x) = \theta_i^a(x)\mathrm{d}x^i, \quad a = 1,\cdots,n \tag{4.149}$$

满足

$$\langle \theta^a, e_b \rangle = \delta_b^a \tag{4.150}$$

$$g_{ij} = \eta_{ab}\theta_i^a\theta_j^b, \quad \eta^{ab} = g^{ij}\theta_i^a\theta_j^b \tag{4.151}$$

即将度规张量场分解为标架场,这时

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \eta_{ab}\theta_i^a\theta_j^b\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \eta_{ab}\theta^a\theta^b \tag{4.152}$$

…

…

若沿底流形某曲线 $C(t)$平行输运某切向量 $X = \xi^a e_a$,则此切向量的分量 ξ^a 满足方程

$$\mathrm{D}_Y\xi^a = 0, \quad Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{4.167}$$

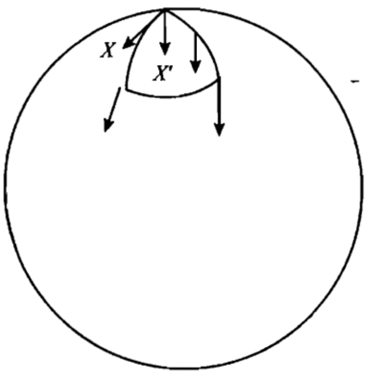


图 4.1　沿以北极为起点及终点的球面三角形平行输运切向量 X 的示意图

若沿以 p 点为起点的闭合曲线 $C(t)$平行输运切向量 X,当再次回到 p 点时,所得切向量 X'_p 一般会相对原切向量X_p 有一转动,例如,流形为 E^3 中二维球面 S^2,如图 4.1 所示. 绕流形上一无穷小回路平行输运切向量 $X = \xi^a e_a$,回到起点后可得向量的无穷小转动,转动大小与闭合回路所包面积 Δ^{ik} 成比例

$$\delta\xi^a \approx \Delta^{ik}R_{bik}^a\xi^b$$

即

$$\delta\xi^a = \int \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k R_{bik}^a\xi^b \tag{4.168}$$

其中曲率系数 R_{bik}^a 可如(3.50)式用自旋联络系数表示为

$$R_{bik}^a = \partial_i\omega_{kb}^a - \partial_k\omega_{ib}^a + \omega_{ic}^a\omega_{kb}^c - \omega_{kc}^a\omega_{ib}^c \tag{4.169}$$

将联络及曲率均写成在 $O(n)$群伴随表示空间中的算子,用矩阵表示,为

$$\omega_k = (\omega_{kb}^a), \quad \Omega_{ik} = (R_{bik}^a) \tag{4.170}$$

上述表示中,a,b 为矩阵元指标,而 k,i 等为矩阵本身的指标. 这时,(4.169)可表示为

$$\Omega_{ik} = \partial_i\omega_k - \partial_k\omega_i + [\omega_i, \omega_k] \tag{4.171}$$

此式很像杨-Mills 场的场强表达式(见上章习题 3)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{4.172}$$

或采用微分形式表达,上两式可分别表示为

及

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega$$
$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A \tag{4.173}$$

由上述类比可看出,在广义相对论中为保证局域 Lorentz 变换的不变性,需引入自旋联络 ω,ω 相当于 $O(n)$规范场势,而相应曲率形式 Ω 相当于 $O(n)$规范场强.

以上分析表明将空间正交标架转动对称规范化,自旋联络相当于规范场势,而曲率相当于规范场强.进一步能否将平移对称规范化?能否把引力规范由 Lorentz 群规范推广到 Poincare 群规范?这种设想存在着很大困难.

…

…

黎曼流形上存在兩種聯絡：Levi-Civita 聯絡、自旋聯絡

…

§ 4-8 測地線 Jacobi 場與 Jacobi 方程

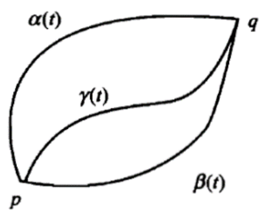
如果有 metric 則通常兩點之間有最短離的曲線為測地線。在未定 metric 的流形上，例如仿射流形上 測地線為自平行曲線，即平行運輸自己切向量的曲線。

X 表示沿曲線的切向量 $\nabla_X X = 0$，若 $X = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$ 則得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

最短距離與自平行等價 這裡用作用量泛函與 Euler-Lagrangian 方程證明…

§ Jacobi field



在測地線附近曲線族的相對行為

定義 $F(u,t) = \gamma_u^t$ 為由 p 到 q 的曲線

原來的測地線是 $\gamma(t) = \gamma_0^t = F(0,t)$

假設曲線 γ 可以連續變化為 $\alpha(t) = \gamma_{-1}^t, \beta(t) = \gamma_1^t$

曲線族 γ_u^t 稱為 γ 的變分。由 F(u，t)的連續性 也可固定 t 此時 $F(u,t) \equiv F_t(u)$ 為由 $\alpha(t)$ 到 $\beta(t)$ 的曲線。

以下用 $V = \frac{\partial}{\partial t}, J = \frac{\partial}{\partial u}$ 為切於相應曲線族的切向量場。

若它們滿足 L_JV=[J,V]=0…(1)
即它們中任一個可被另一個曲線族變更回自己，
此時 在黎曼流形 M 上，當取無撓的(torsion free)黎曼聯絡
黎曼撓率張量(torsion tensor)T，$T(J,V)=\nabla_J V-\nabla_V J-[J,V]=\nabla_J V-\nabla_V J=0$…(2)

黎曼曲率張量算子 R(V，J)滿足

$$R(J,V)V=(\nabla_J\nabla_V-\nabla_V\nabla_J-\nabla_{[J,V]})V$$

$$=\nabla_J\nabla_v V-\nabla_V\nabla_J V \text{…由(1)}$$
$$=\nabla_J\nabla_V V-\nabla_V\nabla_V J \text{…由(2)}$$

當 $\gamma(t)$ 為測地線時 $\nabla_V V=0$，上式化為 $\nabla_V\nabla_V J+R(J,V)V=0$…(*)

此式稱為 Jacobi 場方程，滿足此方程的向量場 $J=\dfrac{\partial}{\partial u}$ 稱為 Jacobi 場。

若非零的 Jacobi 場在測地線 $\gamma(t)$ 上的點 p、q 處為零，則稱 p、q 為測地線的共軛點。

(*)式或寫成 $\dfrac{D^2 J}{dt^2}+R(V,J)V=0$，$V=\gamma'(t)$

[大域微分幾何]中寫成 $\nabla_V^2 J+R(J,V)V=0$，其中 $V=\dfrac{d\gamma}{dt}$，都是一樣的。

習作

1. **在三维欧氏空间中,利用外微分算子 d 及 Hodge * 运算,证明下列各式:**

$$\mathrm{grad}\,fg=(\mathrm{grad}\,f)g+f(\mathrm{grad}\,g)$$
$$\mathrm{curl}(f\boldsymbol{V})=(\mathrm{grad}\,f)\cdot\boldsymbol{V}+f(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{V})$$
$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{V})=(\mathrm{grad}\,f)\cdot\boldsymbol{V}+f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})=\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{W}$$

2. …