第一章 流形 微分流形與微分形式

§ 1.1 流形的拓撲結構

微分流形在為分同胚變換(homeomorphic mapping)下的不變性質(不變量)。

$f: M \to N$ continuous map：N 中任意開集的逆像是 M 中的開集。

Def 同胚映射

$f: M \to N$ 1-1，onto(surjection)，continuous 且 f^{-1} 也是 continuous

Deformed into each other by a continuous，invertible mapping。

Def Hausdorff Space

Def M 是 n dim manifold

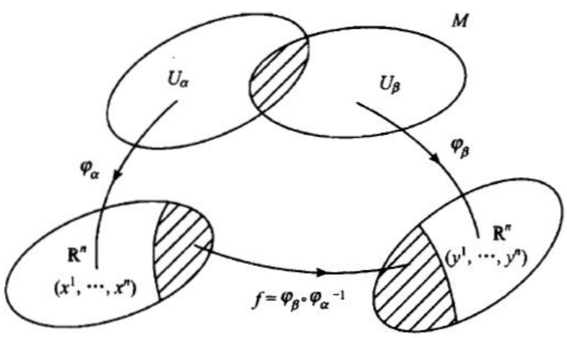
1. Hausdorff space
2. $\forall p \in M, \exists$ p 的開鄰域和 R^n 的開集同胚(locally Euclidean)

然後 引入局部座標系 and chart (U,φ) ，$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

$A = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 流形 M 的 atlas

若 $\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \neq \phi$ 則 $(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ 需相容。

$$f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$x^i \mapsto y^i = f^i(x)$$



§ 1.2 流形的微分結構

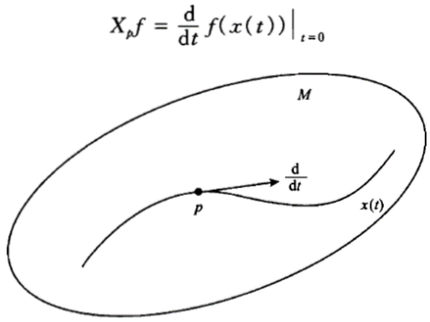
$A = \{\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 滿足

1. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$
2. 任意兩 charts 皆相容
3. A 是具備(1)(2)的 max atlas

$f: M \to N$ 若 m=n 且 f 為同胚、可微 則稱 M,N 微分同胚(diffeomorphism)。

Manifold 的例子：

§ 1.3 切空間與切向量場



Def

將作用在流形任意函數上的線性微分算子

$X=\frac{d}{dt}$ 定義為切於曲線 x(t)的切向量。

在 p 點的 local coordinates 中

$$X_p f = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f\Big|_p$$

切空間 T_pM ，$T_pM \cong R^n$

在 P 點鄰域 U，切叢 $T(U) = \underset{p\in U}{U} T_p(\mathrm{M}) \cong \mathrm{U}\times \mathrm{R}^n$

M 上的可微向量場滿足

1. 線性
2. Leibniz 法則： $X(fg) = f(Xg) + g(Xf)$

Lie bracket $X = \sum_j \xi^j \partial_j , Y = \sum_j \eta^j \partial_j$ 則

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{j,k} (\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}) \partial_k f$$

§ 1.4 餘切向量場

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

§ 1.5 張量場

(r,s)型張量 例如(3,2)型 $T = \mathrm{T}^{ijk}_{mn} \partial_i \otimes \partial_j \otimes \partial_k \otimes dx^m \otimes dx^n$

§ 1.6 Cartan 外積與外微分 微分形式

Λ^m ，微分形式 differential form

外積(wedge product) $\alpha \wedge \beta$

外微分算子 $d : \Lambda^r \to \Lambda^{r+1}$

若 f 是普通函數 則 df 是全微分運算 $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

然後推廣到 p-form

1. 線性
2. $d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q$
3. $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

4. $d^2 = 0$

若 differential form ω 滿足 $d\omega = 0$ 則稱 ω 為 closed form；若存在某(r-1)-form θ 使得 $\omega = d\theta$ 則稱 ω 為 exact form。

R^3 中的向量分析：(1)梯度 (2)旋度 (3)散度

Dirac 磁單極問題 磁荷量子化的條件

Maxwell Equations (James Clerk Maxwell 1831~1879)

$\nabla \cdot \mathrm{E} = 4\pi\rho$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$\nabla \cdot B = 0$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c}(4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t})$$

§ 1.7 流形的定向 積分與 Stokes 定理

可定向曲面 具有內外兩側面 例如 球面 S^2 ，環面 T^2

不可定向 例如 Möbius 面

Def

若 n 維流形 M 上存在一個處處非零的連續 n-form $\omega(x) \in \Lambda^n(M)$ ，則稱流形 M 為可定向流形。

Def

若流形 M 的每一個開覆蓋都有一個有限的子覆蓋 則稱 M 為緊緻的(compact)

若流形 M 的任意開覆蓋都有一個局域有限的子覆蓋 則稱 M 為仿緊緻的(paracompact)，此時可在流形 M 上定義積分。

Stokes 定理：$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

這裡有證明…

§ 習題