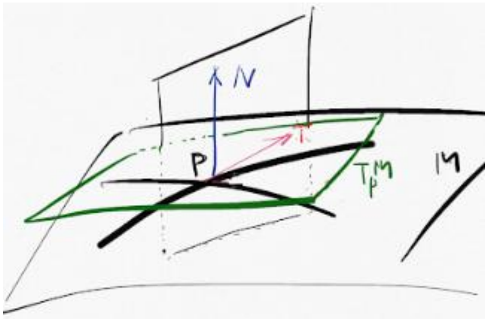


$$\frac{dt}{ds} = \kappa_n N + \kappa_g Y, Y \in T_p(M)$$

$$\kappa_n = \frac{dt}{ds}\cdot N = -t\cdot\frac{dN}{ds} = -\frac{dx\cdot dN}{ds^2} = \frac{II}{I}$$

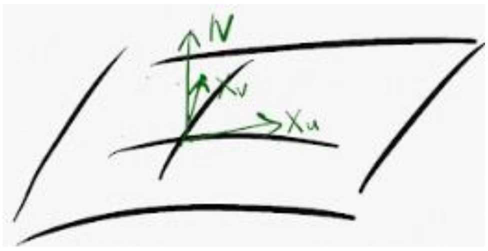
κ_n (法曲率) 的極大 極小為 κ_1, κ_2

$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$ 的兩個方向 $\dfrac{dv}{du}$ κ 有極值，此兩方向稱為 principal direction 互相垂直

其積分曲線稱為 lines of curvatures，以 lines of curvatures 作參數曲線 則 F=0、f=0

引入均曲率 H=$\dfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$，高斯曲率 $K=\kappa_1\kappa_2$

$\kappa_g = \dfrac{dt}{ds}\cdot Y$ (測地曲率)



曲面 X=X(u,v)

$X_u \equiv X_1, X_v \equiv X_2$

$X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + b_{ij} N$ (高斯 eq)

設 $[ij,k] = X_{ij}\cdot X_k$，定義 g^{jk} 使得 $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$

則 $\Gamma_{ij}^k = g^{kl}[ij,l]$

引入 $R_{ijk}^l = \dfrac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{ik}^l - \dfrac{\partial}{\partial u^i}\Gamma_{jk}^l + \Gamma_{ik}^m\Gamma_{mj}^l - \Gamma_{jk}^m\Gamma_{mi}^l$ (sum on m)

$I \to g_{ij}$ ， $K \to R_{ijk}^l$

則在一個 Riemann Manifold (M,g) metrig 是平直的 (flat) $\Leftrightarrow R_{ijk}^l = 0$

用么速測地坐標系時

$e_1 = X_u, e_2 = \dfrac{X_v}{g}, e_3 = \dfrac{X_u \times X_v}{g} = N$

則 E=1，F=0，G=g^2

比較單純地證明 Gauss-Bonnet 定理