求下列微分式所表示的意義，其中 z=f(x,y)

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (right conoid $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=f(\theta) \end{cases}$)

A. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

在 f(x,y)=c 這個 level curve(等高線) $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是此曲線的法向量

$\frac{y}{x}=m$ 是個 level curve 的特別解

Level curve only depends on θ

B.

$z=f(x,y)=g(r,\theta)$，用極座標表示

$xf_x+yf_y=0$ ，$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ ，$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$r_x=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$, $r_y=\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ ，$\theta_x=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{r^2},\theta_y=\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}$

$f_x=g_r r_x+g_\theta\theta_x$

$f_y=g_r r_y+g_\theta\theta_y$

$xf_x+yf_y=x(g_r r_x+g_\theta\theta_x)+y(g_r r_y+g_\theta\theta_y)$

$=(xr_x+yr_y)g_r+(x\theta_x+y\theta_y)g_\theta$ ，($x\theta_x+y\theta_y=0$)

$=(\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r})g_r=rg_r=0$

在 $r\neq 0$ 的區域， $g_r=0$ ，g does not depends on r

所以 $z=f(x,y)=g(r,\theta)=h(\theta)$

特殊解為 $z=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

Note $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$

（2）$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$（旋轉面$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=f(r)\end{cases}$）