密切平面(osculating plane)

假設$\vec{x}\cdot\vec{a}=p$是過曲線上三點 P(u_1),Q(u_2),R(u_3)的平面

設 f(u)=$\vec{x}\cdot\vec{a}-p$則 f(u_1)=f(u_2)=f(u_3)=0

由 Rolle 定理,存在 v_1,v_2,$u_1\le v_1\le u_2\le v_2\le u_3$,使得$f'(v_1)=f'(v_2)=0$

因此,存在 v_3,$v_1\le v_3\le v_2$,使得$f''(v_3)=0$,讓 Q,R$\to$P,則

$f(u)=\vec{x}\cdot\vec{a}-p=0$ (then $(\overline{x(u)}-\overline{x(u_0)})\cdot\vec{a}=0$

$f'(u)=\vec{\dot{x}}\cdot\vec{a}=0$

$f''(u)=\vec{\ddot{x}}\cdot\vec{a}=0$

所以密切平面滿足$\left|(\overline{x(u)}-\overline{x(u_0)})\wedge\overline{\dot{x}(u_0)}\wedge\overline{\ddot{x}(u_0)}\right|=0$

例1.求$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t-t^2 \\ z=2t \end{cases}$在(1,0,2)的密切平面

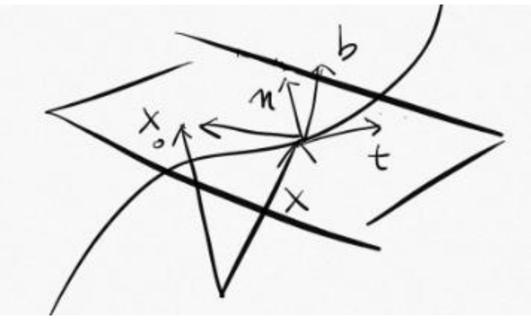
$\dot{x}=$(2t,1-2t,2)

$\ddot{x}=$(2,-2,0)

$\dot{x}(1)=$(2,-1,2)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

習作



一曲線 C 的所有密切圓都通過某定點,則此曲線是一平面曲線

$X_0=X+\lambda T+\mu N$ 則

$0=T+\lambda' T+\lambda(\kappa N)+\mu' N+\mu(-\kappa T+\tau B)$

$(1+\lambda'-\mu\kappa)T+(\lambda\kappa+\mu')N+\mu\tau B=0$

$\begin{cases} 1+\lambda'-\mu\kappa=0 \\ \lambda\kappa+\mu'=0 \\ \mu\tau=0 \end{cases}$ 則$\tau=0$ 所以是一平面曲線。